Mettre l'accent sur le Raisonnement spatial

M–12

Document d'appui de Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques

Table des matières

Mettre l’accent sur le raisonnement spatial

« La pensée spatiale fait partie intégrante de la vie de tous les jours. Les personnes, les objets naturels, les objets conçus par les humains et les structures réalisées par les humains sont présents dans l’espace, et les interactions entre les personnes et les choses doivent être décrites et comprises en fonction des positions, des distances, des orientations, des formes et des régularités. »

(National Research Council, 2006, traduction libre, p. 5)

Mettre l’accent sur l’enseignement des mathématiques donne un aperçu de ce qu’il faudrait pour aider les élèves de l’Ontario à approfondir leur apprentissage et mieux comprendre les mathématiques. Ce document présente sept principes fondamentaux servant à planifier et à réaliser des améliorations, et donne des exemples pour chacun de ces principes.

Le présent document adopte une approche plus concrète en traitant d’un domaine particulier des mathématiques. D’autres documents d’appui examineront d’autres sujets importants faisant partie de l’enseignement et de l’apprentissage des mathématiques.

Sept principes fondamentaux pour améliorer l’enseignement des mathématiques de la maternelle à la 12e année

- Mettre l’accent sur les mathématiques.
- Coordonner et consolider le leadership en mathématiques.
- Développer une compréhension de l’enseignement efficace des mathématiques.
- Soutenir des pratiques collaboratives d’apprentissage professionnel.
- Créer un environnement d’apprentissage propice aux mathématiques.
- Favoriser l’évaluation en mathématiques.
- Faciliter l’accès aux ressources d’apprentissage des mathématiques.

Qu’est-ce que le raisonnement spatial?

« La pensée spatiale est puissante. Elle résout des problèmes en gérant, transformant et analysant des données, tout particulièrement des ensembles de données complexes et d’envergure, et en communiquant les résultats de ces processus à soi-même et à d’autres. »

(National Research Council, 2006, traduction libre, p. 5)

La pensée spatiale ou le raisonnement spatial implique la position et le déplacement d’objets et de soi, soit mentalement ou physiquement, dans l’espace. Il ne s’agit pas d’une procédure ni d’une habileté unique, mais en fait, d’un nombre considérable de concepts, d’outils et de processus (National Research Council, 2006).

Selon le National Research Council (2006), la pensée spatiale met en jeu trois composantes, soit les concepts d'espace, les outils de représentation et le(s) processus de raisonnement (p. 3). Elle implique la compréhension de relations au sein des structures spatiales (et entre celles-ci) à travers une vaste gamme de représentations possibles (tout aussi bien des dessins que des modèles informatiques), ainsi que des moyens de communiquer à leur sujet. Lorsqu'un enfant manipule un prisme rectangulaire pour bien le placer dans le château qu'il construit avec les blocs d'un jeu de construction, il emploie le raisonnement spatial, tout comme l'élève qui se sert du schéma d'un rectangle pour prouver que la formule pour trouver l'aire de la surface d'un triangle est $\frac{1}{2}\, b \times h$. Le raisonnement spatial informe au plus haut point notre aptitude à explorer et à résoudre des problèmes dans le domaine des mathématiques, tout particulièrement des problèmes inhabituels ou nouveaux.

Le curriculum de l'Ontario combine la géométrie et le sens de l'espace dans un même domaine (comme d'ailleurs plusieurs autres curriculums à travers le monde), car la géométrie et le sens de l'espace sont étroitement liés. Le mot géométrie signifie en gros « mesure de la Terre » et concerne directement la mesure et le déplacement d'objets dans l'espace. La géométrie est le fondement des mathématiques telles que nous les connaissons aujourd'hui; elle a été développée pour expliquer des phénomènes et résoudre des problèmes directement liés à la vie de tous les jours, par exemple la mesure du temps et la navigation en mer. La pensée spatiale a donné naissance aux plus anciennes formes de pensée mathématique sophistiquée. Cependant, malgré son importance, la recherche a montré qu'en Amérique du Nord, on consacre moins de temps à la géométrie qu'aux autres matières enseignées à l'école (voir Bruce, Moss et Ross, 2012; Clements et Sarama, 2011).

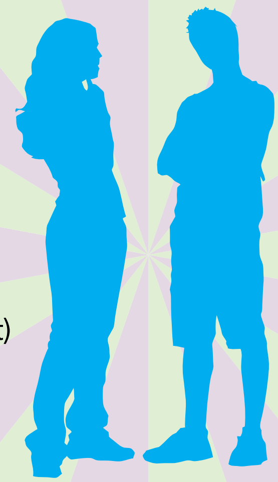
Nous ne faisons que commencer à comprendre les liens entre le raisonnement spatial et l'apprentissage des mathématiques. Nous savons qu'en portant notre attention sur la pensée spatiale, nous pouvons mettre en valeur et faire fructifier les forces des élèves. Grâce à la pensée spatiale, les mathématiques peuvent devenir une discipline plus visuelle et se rattacher à ce que font les mathématiciens lorsqu'ils explorent les régularités dans le monde qui les entoure et font des découvertes. Les mathématiques deviennent plus accessibles, plus attrayantes et plus pertinentes lorsque l'on en étudie les aspects spatiaux. Albert Einstein a conçu sa théorie de la relativité, d'où provient l'équation la plus connue de tous les temps ($E = mc^2$), en imaginant qu'il chevauchait un faisceau lumineux. Stephen Hawking a expliqué qu'« en perdant la dextérité de ses mains, il a été forcé de voyager à travers l'univers dans son imagination et d'essayer de visualiser le fonctionnement de celui-ci » (Johnson, 2014, traduction libre). Nous devons continuellement nourrir l'intérêt, l'engagement et la créativité des élèves en mathématiques et nous tourner vers la pensée spatiale en tant que moyen pour le faire.

« Premièrement, il faut se rappeler que l'intelligence spatiale a une importance évolutionnaire et adaptative. Tout organisme mobile doit être capable de naviguer dans son monde pour survivre et doit se représenter son environnement spatial pour être en mesure de le faire. »

(Newcombe et Frick, 2010, traduction libre, p. 102)

Le raisonnement spatial peut impliquer :

- La construction (combinaison concrète ou mentale de formes pour obtenir des formes différentes, telles que l'association de deux triangles pour faire un rectangle)
- l'orientation
- l'utilisation du raisonnement proportionnel
- l'utilisation du raisonnement non verbal
- la création et la lecture de cartes, de diagrammes et d'autres représentations visuelles de données
- repérer des objets et se souvenir de leur emplacement dans l'espace
- la décomposition (la décomposition concrète ou mentale de formes consistant à voir des formes dans d'autres formes, par exemple en divisant un rectangle en deux pour obtenir deux triangles)
- la manipulation d'objets
- l'imagination et la visualisation d'objets se déplaçant dans l'espace (transformations et rotation mentales)
- La comparaison d'objets
- schématiser (par exemple la représentation d'un objet tridimensionnel sur une surface bidimensionnelle ou la représentation d'un processus tel qu'un organigramme, qui nécessite une visualisation abstraite)
- le changement de dimension (voir les liens entre des objets tridimensionnels et des représentations bidimensionnelles)
- la création ou la conception d'objets
- la perspective (la prise en compte de la perspective de quelqu'un qui est dans un emplacement différent, c'est-à-dire du point de vue différent dont il voit un objet)
- la visualisation
- le mouvement du corps dans l'espace
- le changement d'échelle (imaginer des objets proportionnellement plus grands ou plus petits, homotétie)
- Le déplacement et l'utilisation efficace de la signalisation pour s'orienter



Pourquoi le raisonnement spatial est-il important?

« La recherche sur le raisonnement spatial accorde une importance critique aux habiletés en raisonnement spatial dans les domaines de la géométrie, de la mesure et de la résolution de problèmes, tout aussi bien au début des expériences des élèves en mathématiques que plus tard à l'école secondaire et au-delà dans les domaines des sciences, de la technologie et de l'ingénierie. »

(Shumway, 2013, traduction libre, p. 50)

Mais qui a besoin du raisonnement spatial? Outre le fait que nous devons tous nous déplacer dans un monde en trois dimensions, les carrières dans les sciences, la technologie, l'ingénierie et les mathématiques nécessitent de fortes habiletés spatiales. En fait, la recherche a démontré que l'habileté spatiale est un indicateur de succès dans ces domaines (voir Newcombe, 2010, 2013; Wai, Lubinski et Benbow, 2009). La pensée spatiale est également fortement mise à contribution dans de nombreux domaines artistiques. À l'heure actuelle, un mouvement milite afin d'ajouter les arts à la catégorie des sciences, de la technologie, de l'ingénierie et des mathématiques. L'architecture, la conception graphique, les sciences informatiques, la biologie, la physique, la chimie, la géologie, la géographie et même la médecine (si l'on pense au raisonnement spatial nécessaire pour comprendre les diverses représentations du corps, comme les rayons X et l'imagerie par résonance magnétique) supposent toutes de fortes habiletés spatiales.

C'est peut-être à cause de la complexité propre au raisonnement spatial et parce qu'il nous reste beaucoup à apprendre et comprendre à son sujet que les stratégies d'enseignement et d'apprentissage qui visent le développement du raisonnement spatial font actuellement défaut. Il faut cependant se réjouir, car cela est en train de changer. En effet, dans son rapport *Learning to Think Spatially*, le National Research Council (2006) a lancé un appel à l'action dans l'enseignement : nous devons reconnaître l'importance du raisonnement spatial non seulement dans les domaines des mathématiques, mais aussi dans les autres matières. De plus, les chercheurs en éducation et les leaders du système doivent en améliorer la compréhension et favoriser la littératie spatiale chez les élèves. Le National Research Council estime que la situation actuelle constitue une « lacune majeure » dans l'enseignement et estime qu'à moins que l'on porte une attention particulière à la pensée spatiale, les concepts, les outils et les processus qui la sous-tendent resteront enfermés dans une zone grise du curriculum de la maternelle à la 12^{e} année, et ne seront pas enseignés explicitement et systématiquement dans quelconque partie du curriculum (p. 7).

Ce que dit la recherche : Raisons de mettre l'accent sur le raisonnement spatial dans les mathématiques

« Nous avons pour la plupart appris à penser et à parler du monde qui nous entoure en nous servant de mots, de listes et de statistiques. Bien qu'il s'agisse d'outils utiles pour communiquer, ils sont cependant loin de tout dire. La pensée spatiale ouvre les yeux et l'esprit à de nouvelles relations, de nouvelles questions et de nouvelles réponses. »

(Center for Spatial Studies, UCSB, n.d., traduction libre)

La pensée spatiale joue un rôle fondamental tout au long du curriculum de la maternelle à la 12e année. Qu'il s'agisse de l'apprentissage des sciences, des mathématiques, des arts, de l'éducation physique ou de la littératie, il est important de posséder des habiletés inhérentes à la pensée spatiale. Par exemple, la chimie au secondaire nécessite que les élèves comprennent la structure spatiale des molécules. Dans les activités physiques, les élèves doivent être conscients des positions de leur corps dans l'espace et par rapport à d'autres objets. L'art, sous toutes ses formes, offre de nombreuses possibilités d'exercer ses habiletés spatiales, qu'il s'agisse de s'amuser à manipuler des formes dans des activités de peinture ou de représenter spatialement des notes musicales. De surcroît, le rôle de la pensée spatiale dans l'enseignement des mathématiques est particulièrement important. Les recherches effectuées dans les domaines de l'éducation, de la psychologie et des sciences neurologiques révèlent un lien étroit entre la pensée spatiale, l'apprentissage des mathématiques et la réussite dans ce domaine.

1. La pensée spatiale est essentielle à la pensée mathématique et à la réussite dans ce domaine.

« La relation entre l'aptitude spatiale et les mathématiques est tellement bien établie qu'il n'y a plus lieu de demander si elles sont liées. »

(Mix & Cheng, 2012, traduction libre, p. 206)

Près d'un siècle de recherches a confirmé la relation étroite entre la pensée spatiale et la réussite en mathématiques (Mix et Cheng, 2012). En général, les personnes possédant des habiletés spatiales prononcées ont aussi tendance à obtenir de bons résultats en mathématiques. En outre, cette relation ne semble pas limitée à un domaine particulier des mathématiques. Selon les chercheurs, les faits suggèrent que la pensée spatiale joue un rôle important en arithmétique, dans la résolution de problèmes écrits, en mesure, en géométrie, en algèbre et en calcul. Savoir exactement comment l'aptitude spatiale est liée à l'aptitude en mathématiques, et savoir quels types d'aptitudes spatiales sont liés à quels types d'aptitudes mathématiques, sont des questions qui restent à explorer. Les chercheurs souhaitent particulièrement savoir comment l'aptitude spatiale favorise la maîtrise des faits numériques et les habiletés en calcul mental. Des recherches récentes dans les domaines de l'enseignement des mathématiques, de la psychologie et même de la neuroscience essaient de clarifier ces relations. Il semble aussi, par exemple, que l'aptitude spatiale est liée à la compréhension des quantités et à l'émergence de la numératie chez les petits (pour un résumé de cette recherche, voir Drefs et D'Amour, 2014). La recherche indique aussi que les habiletés spatiales peuvent prédire le rendement en mathématiques. Par exemple, une étude longitudinale récente portant sur des enfants de trois ans a indiqué que les habiletés spatiales étaient de meilleurs indicateurs que le vocabulaire et les habiletés générales en mathématiques pour prédire les résultats en mathématiques à l'âge de cinq ans (Farmer *et al.*, 2013). Des études auprès d'adolescents ont souligné encore plus le rôle de la pensée spatiale dans la prédiction du rendement scolaire futur. Dans une étude longitudinale portant sur 400 000 élèves, Wai, Lubinski et Benbow (2009) ont constaté que les habiletés spatiales évaluées au secondaire permettaient de prédire quels seraient les élèves qui plus tard s'engageraient et réussiraient dans des disciplines liées à la science, à la technologie, à l'ingénierie et aux mathématiques. En outre, la pensée spatiale était un meilleur indicateur de réussite en mathématiques que les habiletés mathématiques ou verbales. L'ensemble des résultats des recherches ci-dessus dépeint un tableau clair en ce qui concerne la pensée spatiale et les mathématiques.

2. La pensée spatiale est malléable et peut être améliorée par le biais de l'éducation et de l'expérience

Il existe une croyance généralisée selon laquelle les habiletés de pensée spatiale sont préétablies – soit vous êtes un penseur spatial ou vous ne l'êtes pas. Ceci est une idée erronée. La pensée spatiale se compose de nombreuses habiletés et, pour cette raison, il est possible d'exceller dans certains aspects de la pensée spatiale, par exemple en orientation, tout en étant relativement faible dans d'autres domaines, par exemple en visualisation. Un autre aspect encore plus important est que les habiletés de pensée spatiale peuvent être améliorées avec la pratique. Une méta-analyse récente, qui a récapitulé plus de deux décennies de recherches sur la formation spatiale, a révélé que la pensée spatiale peut être améliorée à l'aide de diverses activités et pour tous les groupes d'âge (Uttal *et al.*, 2013). Des activités particulières ayant permis d'améliorer les habiletés de pensée spatiale sont notamment les casse-têtes, les jeux vidéo (p. ex., Tetris), les jeux de blocs de construction, la pratique d'activités spatiales, les tâches dans les domaines des arts et de la conception, et les leçons et activités en classe conçues pour favoriser et développer les habiletés de pensée spatiale des élèves. Un grand nombre d'études ont montré que des améliorations dans un type de raisonnement spatial donnent souvent des résultats dans d'autres types de tâches (p. ex., des tâches nouvelles et non familières). Arriver à comprendre en quoi consistent ces liens (exactement comment et pourquoi ces améliorations se produisent) ainsi que leur nature constitue un champ passionnant pour de futures recherches. En fait, des recherches sont en cours pour déterminer si des améliorations dans la pensée spatiale entraînent des améliorations dans les résultats en mathématiques. Cheng et Mix (2012) ont demandé à des jeunes de six à huit ans de passer des tests spatiaux et mathématiques puis, pendant 45 minutes, de prendre part à des activités de rotation mentale (groupe d'étude de la pensée spatiale) ou de faire des mots croisés (groupe témoin). Les enfants ont été à nouveau testés avec les mêmes tâches spatiales et mathématiques. Comparativement à ceux du groupe témoin, les enfants du groupe d'étude de la pensée spatiale ont de beaucoup amélioré leurs habiletés de calcul, tout particulièrement dans les problèmes où il y avait un terme manquant (p. ex., 5 + ____ = 8). Bien que d'autres études soient nécessaires pour établir avec certitude une relation causale entre la pensée spatiale et les résultats en mathématiques, cette étude et d'autres actuellement en cours donnent lieu à penser qu'il faut être optimiste en ce qui concerne les vastes avantages de l'apprentissage de la pensée spatiale. Somme toute, les faits sont suffisants pour suggérer que les habiletés de pensée spatiale peuvent être améliorées avec la pratique. Étant donné le lien étroit entre les habiletés spatiales et les habiletés mathématiques, « nous pouvons nous attendre à faire d'une pierre deux coups avec l'enseignement du raisonnement spatial, celui-ci offrant également des avantages pour les mathématiques » (Verdine *et al.*, 2013, traduction libre, p. 13). Une stratégie d'enseignement qui est peut-être tout aussi efficace, si non plus, consiste à intégrer et à favoriser les habiletés spatiales des élèves tout au cours de l'enseignement des mathématiques.

3. L’école joue un rôle important dans le développement du raisonnement spatial.

Des études ont montré que les aptitudes spatiales des enfants se développent durant l’année scolaire, mais cessent de progresser pendant l’été (Huttenlocher, Levine et Vevea, 1998). Ce résultat indique que non seulement la pensée spatiale peut être améliorée, mais qu’il y a aussi quelque chose que nous faisons déjà à l’école pour la développer (Newcombe, 2010). De nouvelles recherches ont été entreprises pour montrer ce qu’est ce « quelque chose » et quelles stratégies peuvent être utilisées à l’école pour améliorer le raisonnement spatial des enfants. L’identification de ces stratégies est particulièrement importante pour soutenir les populations défavorisées et pour traiter la question d’équité en éducation (voir ci-dessous).

Enjeux socioéconomiques

« En tant que groupe, les enfants provenant de familles défavorisées à faible revenu ont des résultats en mathématiques qui sont bien inférieurs à ceux des enfants provenant de familles dont les revenus sont plus élevés. De plus, les enfants des minorités sont disproportionnellement représentés dans les populations à faible revenu, et il en résulte des disparités sociales et raciales importantes dans l’enseignement des mathématiques qui entraînent la réduction des possibilités d’apprentissage. Les faibles résultats en mathématiques ont de sérieuses conséquences sur le quotidien et sur l’avancement professionnel. »

(Jordan et Levine, 2009, traduction libre, p. 60)

Offrir un meilleur accès aux mathématiques est un impératif moral pour le personnel enseignant qui se répercute sur l’équité sociale, particulièrement dans le cas des enfants provenant de quartiers dont le statut socioéconomique est bas. Le rapport entre le statut socioéconomique et la réussite en mathématiques à l’école est bien établi; les élèves provenant de milieux dans lesquels le statut socioéconomique est faible ont généralement moins de chances de réussir en mathématiques et de poursuivre des études dans ce domaine que ceux qui proviennent de milieux dont le statut socioéconomique est plus élevé (Jordan et Levine, 2009). Ne pas réussir en mathématiques restreint les possibilités et choix de carrière et empêche de nombreux élèves de poursuivre des carrières qui les aideraient à briser le cycle de la pauvreté (nous savons que de nombreuses professions à revenu plus élevé nécessitent au minimum certaines connaissances de base en mathématiques). Bien entendu, au-delà de l’amélioration des possibilités d’emploi futures, notre travail en tant qu’enseignante ou enseignant est de permettre à tous les élèves de réaliser leur plein potentiel. Une attention portée au raisonnement spatial peut créer pour tous les élèves des portes d’entrée supplémentaires dans le domaine des mathématiques et améliorer leurs perspectives d’avenir et de réussite.

Iniquités entre les sexes

Les femmes continuent d’être très sous-représentées dans les domaines de la science, de la technologie, de l’ingénierie et des mathématiques, et les hommes obtiennent de meilleurs résultats dans les tests de raisonnement spatial. Toutefois, Nora Newcombe (2010) remarque que les différences moyennes entre les sexes ne nous renseignent pas sur les performances individuelles puisque certaines filles ont des habiletés spatiales élevées, tandis que certains garçons ne possèdent pas de telles habiletés (p. 33). La question la plus importante en ce qui concerne l’enseignement est que les filles – ainsi que les garçons – peuvent améliorer leur pensée spatiale. Les recherches effectuées par Casey, Erkut, Ceder et Young (2008) ont montré que des moyens pour améliorer la pensée spatiale, tels que les mots croisés, les casse-têtes et les jeux avec des blocs de construction, sont « particulièrement utiles pour les filles et les enfants des écoles des quartiers dont le statut socioéconomique est faible » (dans Tepylo, Moss et Hawes, à paraître, traduction libre). Il est impératif d'offrir aux garçons et aux filles des occasions bien planifiées et réfléchies pour qu'ils explorent des outils, des idées et des processus spatiaux afin d'améliorer leur capacité de raisonnement spatial et d'accroître leur accès aux mathématiques sous toutes ses formes.

Difficultés dans l'apprentissage des mathématiques

Il est regrettable pour les enseignants de mathématiques et pour les enfants qu'il y ait aussi peu de ressources appropriées pour aider les élèves ayant des besoins spéciaux en mathématiques et, bien entendu, aucune évaluation faisant consensus pour identifier les défis et les difficultés d'apprentissage (Sarama et Clements, 2009). En revanche, nous en savons bien plus au sujet de la littératie et des difficultés dans l'acquisition et le traitement du langage (Ansari, 2013). Une incapacité d'apprentissage identifiée en mathématiques, liée à la cognition spatiale, s'appelle l'*acalculie spatiale*, et est caractérisée par des difficultés d'alignement des chiffres et de lecture des symboles opératoires (Mix et Cheng, 2012). Mais il reste beaucoup de travail à faire pour découvrir les rapports entre la capacité spatiale, la compréhension des mathématiques et les résultats dans ce domaine, et pour donner aux enseignants des outils d'identification et d'intervention. Dans leurs travaux, Sarama et Clements citent un exemple tiré de la recherche qui montre comment des déficits spatiaux ont des conséquences sur la capacité des enfants à appréhender des amplitudes et des quantités. Ce problème a probablement son origine très tôt, lorsque l'enfant commence à *subitiser* (mot d'origine latine signifiant la capacité de percevoir très rapidement des petites quantités – on peut penser à un dé et au sens quasi instantané permettant de reconnaître les quantités correspondant aux agencements des points sans avoir à les compter). Dans le cas des enfants ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, la capacité à subitiser peut être retardée et ces enfants peuvent avoir besoin de continuer à dénombrer les éléments individuels de petits ensembles. Les enfants éprouvant cette difficulté de reconnaître globalement des petites quantités sont à risque dans le développement de leur apprentissage des mathématiques (*ibid*).

Les recherches sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques ont déterminé trois sous-groupes de personnes : celles qui ont des difficultés de même ordre en littératie et en mathématiques, celles qui accusent un retard dans les deux domaines mais sont relativement plus avancées en mathématiques, et celles qui ont des difficultés d'apprentissage en mathématiques seulement. Rourke (1993) a mené cette recherche avec des jeunes de 9 à 14 ans, mais des recherches ultérieures ont confirmé l'existence de tels groupes chez les enfants, les adolescents et les adultes (voir Mix et Cheng, 2012). Ceux qui éprouvent des difficultés dans les deux domaines, et ceux qui obtiennent des résultats relativement plus élevés en mathématiques, possèdent des capacités visuo-spatiales plus développées et des habiletés verbales plus faibles que les enfants ayant uniquement des difficultés dans l'apprentissage des mathématiques (et par conséquent, ils ont du mal à effectuer des tâches essentiellement verbales, telles que la résolution de problèmes écrits). Les membres du groupe ayant uniquement des difficultés dans l'apprentissage des mathématiques avaient une capacité verbale bien plus élevée mais une capacité spatiale bien plus faible (ainsi que tout un ensemble de difficultés liées aux mathématiques, notamment la lecture des symboles, l'agencement et l'écriture des nombres, le respect des procédures, la mémorisation des faits numériques et l'objectivation de la vraisemblance de leurs réponses). Cette recherche a aussi constaté que la lacune en matière de capacité spatiale s'aggrave au fil du temps, ce qui signifie que les enfants ayant des déficits visuo-spatiaux perdent régulièrement du terrain à mesure qu'ils vieillissent (*ibid*, p. 219).

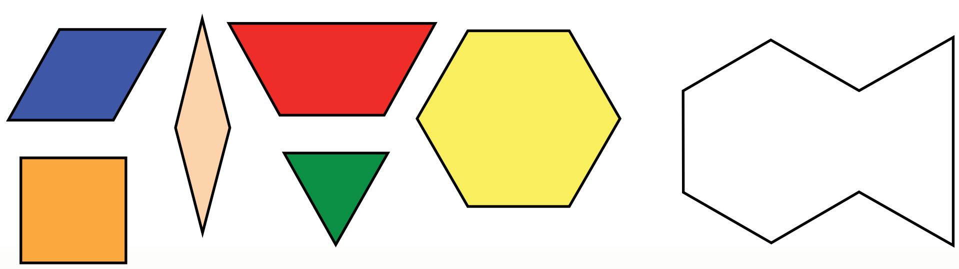
En résumé, bien que nous sachions que de bonnes capacités spatiales conduisent à la réussite en mathématiques et qu'une faiblesse dans les domaines spatiaux peut avoir une incidence négative sur les résultats en mathématiques, il y a beaucoup de recherches à faire dans les domaines de l'éducation et de la psychologie pour mettre en évidence les rapports exacts, tout particulièrement de sorte à nous aider dans l'enseignement et les pistes d'intervention à privilégier. Voici ce que nous savons : l'identification précoce des difficultés spatiales chez les enfants est essentielle, et les nouvelles recherches qui établissent des liens entre la psychologie, la neuroscience et l'enseignement des mathématiques sont très prometteuses en ce qui concerne les interventions pouvant aider à mettre ces enfants sur un pied d'égalité.

Concepts essentiels liés au raisonnement spatial : Étude du rôle de la visualisation spatiale

Tous les types d'habiletés inhérentes à la pensée spatiale ne sont pas liés aux résultats en mathématiques dans la même mesure. L'apprentissage des mathématiques dépend plus de certaines habiletés de pensée spatiale que d'autres. La visualisation spatiale s'est révélée particulièrement importante pour l'apprentissage des mathématiques et la réussite dans ce domaine. Étendant son influence sur toutes les années d'études et dans tous les domaines, la visualisation spatiale est un concept essentiel qui favorise la compréhension et la créativité en mathématiques chez les apprenants.

Qu'est-ce que la visualisation spatiale? La visualisation spatiale est un type particulier de pensée spatiale qui implique l'utilisation de notre imagination pour « générer, mémoriser, extraire et transformer des images visuelles bien structurées » (Lohman, 1996, traduction libre, p. 98); elle est parfois envisagée comme étant la capacité à penser avec l'« intelligence de l'œil ». La découverte de la structure de l'ADN, la théorie de la relativité et l'invention du moteur ont toutes été décrites comme étant des créations nées d'une visualisation spatiale. Dans toute tentative de favoriser ce type de pensée chez les élèves, il est important que nous ayons une bonne idée de ce que signifie visualiser spatialement. Voici quelques exemples de tâches mathématiques faisant appel à cette habileté importante.

1. Tâches de composition et de décomposition



En utilisant n'importe quelle combinaison des mosaïques géométriques ci-dessus et en faisant appel à vos habiletés de visualisation, déterminez le nombre minimal de pièces nécessaires pour remplir la figure à droite.

Quel est le plus grand nombre de pièces pouvant servir à remplir la figure?

Les activités de composition et de décomposition présentent de nombreuses occasions de visualiser des solutions possibles avant l'exécution proprement dite d'une tâche.

2. Imaginez ceci : résoudre un problème avec l'« intelligence de l'œil »*

Imaginez un grand cube flottant devant vous. Ce cube est composé de 64 cubes plus petits et est donc un cube de 4 × 4 × 4. Imaginez maintenant que vous regardez directement le devant du cube et que vous ne pouvez donc voir que sa face avant, une face carrée de 4 × 4. Vous allez maintenant percer un trou à travers les cubes qui sont situés aux quatre coins devant vous, jusqu'à la face arrière.

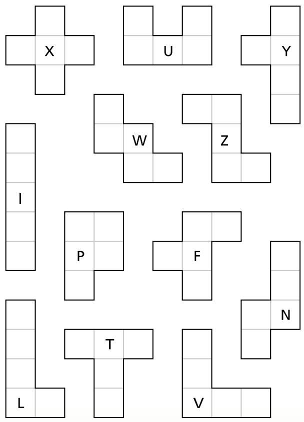
Imaginez maintenant que vous êtes au-dessus du cube, vis-à-vis de sa face supérieure. À nouveau, tout ce que vous voyez est une face carrée de 4 × 4. Vous percez un trou à travers les cubes qui sont situés aux quatre coins jusqu'à l'autre face.

Combien des 64 cubes avez-vous percés?

Avez-vous été capable de visualiser la solution? Pour résoudre ce problème, nous devons faire appel à diverses habiletés qui entrent habituellement en jeu dans la visualisation spatiale : former une image mentale (un cube tridimensionnel), garder en mémoire cette image mentale, changer de perspective (passer de la vision du devant du cube à celle du haut) et transformer cette image mentale (en perçant des trous à travers les coins et en faisant tourner le cube dans votre tête). Bien des problèmes ou des solutions nécessiteront de faire appel à ces divers aspects de la visualisation spatiale à divers degrés. Pour cette raison, la visualisation spatiale peut se présenter différemment suivant le contexte. Mais, essentiellement, la visualisation spatiale nécessite que l'on se fasse une image mentale et qu'on la mémorise, puis qu'on la modifie ou manipule de façon à la transformer.

Les problèmes semblables à celui présenté ci-dessus sont souvent difficiles à résoudre au début, mais grâce à la sélection de problèmes adaptés à l'âge et à un étayage – et aussi à beaucoup de pratique – les élèves développeront leurs capacités à visualiser et à résoudre mentalement des problèmes.

3. Exercices de pentominos et de pliage



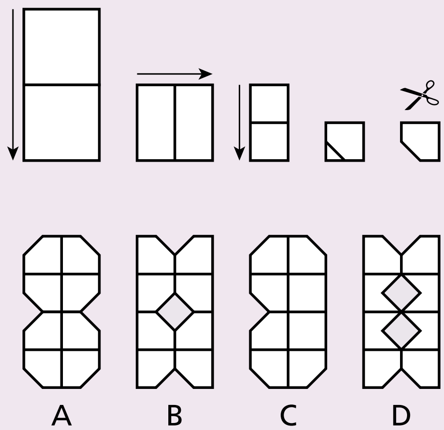
Quels sont les pentominos ci-dessus qui peuvent être pliés pour former une boîte (c.-à-d. un cube dont le dessus est ouvert)?

Les activités dans lesquelles on plie mentalement une structure pour créer une nouvelle forme reposent essentiellement sur des habiletés de visualisation spatiale. Tout comme avec d'autres activités qui supposent une visualisation spatiale, il est souvent important de commencer par visualiser une solution possible, puis de mettre à l'essai cette solution dans la pratique ou le concret (p. ex., en pliant physiquement les pentominos pour vérifier les prévisions).

* Le jeu de la section 2 est tiré du site Web NRICH Enriching Mathematics Project de l'Université de Cambridge : http://nrich.maths.org/frontpage. Visitez ce site Web pour y trouver d'autres exercices de visualisation ainsi que de nombreuses autres activités spatiales convenant à toutes les années d'études.

Évaluation des habiletés de visualisation spatiale au moyen de tests de pliage de papier

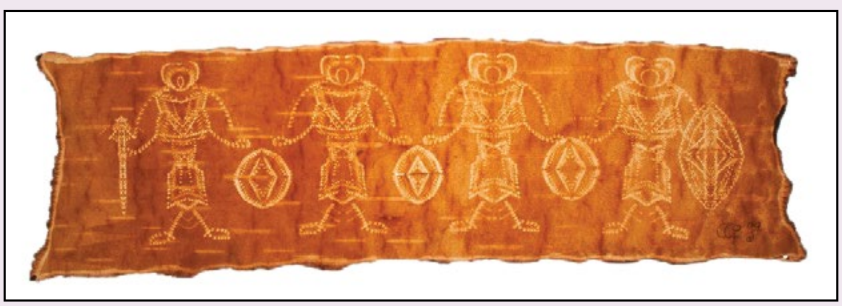
Un test courant des habiletés visuo-spatiales consiste à plier du papier. Pour pratiquer ce type de tâche, essayez de faire ce qui suit. Note : Les flèches indiquent la direction du pliage, et l'icône de ciseau représente une coupe le long de la ligne marquée. Quel morceau de papier représente le résultat final?



À quoi ressemble le résultat final? Avez-vous été capable de le visualiser?

Conformément à la définition de la visualisation spatiale, cette tâche nécessite que vous génériez, mémorisiez et transformiez le pliage et la coupe du morceau de papier.

Il est intéressant de noter que ce test fait penser à la technique des motifs sur écorce de bouleau des Premières Nations. Pendant des millénaires, les membres des Premières Nations ont créé de belles œuvres d'art complexes en pliant des morceaux d'écorce de bouleau et en y perçant des petits trous avec les dents. Le résultat du dépliage de l'écorce pour lui redonner sa forme originale peut être vu dans l'exemple ci-dessous.



Once We Were Warriors (2009). Œuvre par Half Moon Woman (Pat Bruderer). Reproduit avec la permission de l'artiste.

Pour plus de renseignements sur cette forme d'art, visionnez la vidéo à http://www.youtube.com/watch?v=bFJaa9ndAts.

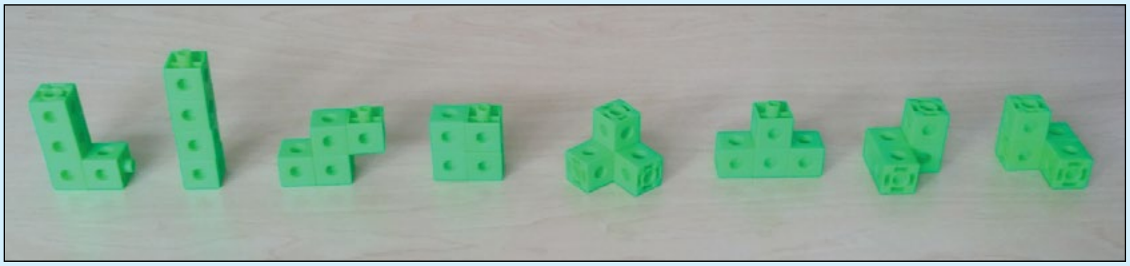
En plus de la visualisation spatiale, la mémoire de travail visuelle spatiale et la rotation mentale sont deux autres types d'habiletés spatiales dont on sait qu'elles sont hautement liées à l'apprentissage des mathématiques et à la réussite dans ce domaine.

Rotation mentale : De toutes les habiletés spatiales étudiées, la rotation mentale a suscité le plus d'intérêt chez les chercheurs. Définies comme étant la capacité de faire tourner mentalement des objets bidimensionnels ou tridimensionnels, les habiletés de rotation mentale ont été liées à la réussite dans divers aspects des mathématiques, notamment l'arithmétique, les problèmes écrits, la géométrie et l'algèbre. Bien que la rotation mentale soit souvent considérée comme une habileté spatiale distincte, il est important de se rendre compte qu'elle constitue aussi un exemple de visualisation spatiale, et c'est là une autre occasion de se rappeler qu'il y a beaucoup de chevauchements entre les habiletés et les termes que nous utilisons pour définir la pensée spatiale.

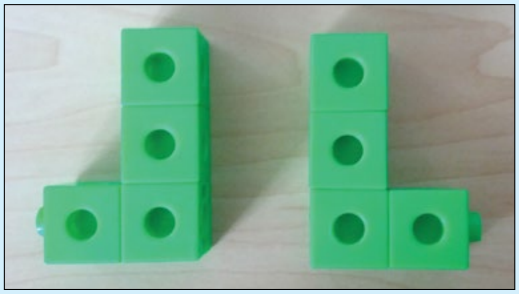
Essayez ceci!

Le défi des cubes : (découvrir des équivalences tridimensionnelles?)

En utilisant des groupes de trois, quatre ou cinq cubes emboîtables, construire le plus grand nombre possible d'objets tridimensionnels différents. Il est recommandé de commencer avec trois cubes avant de passer à quatre, puis ensuite à cinq cubes (voir la solution ci-dessous pour toutes les constructions avec 4 cubes).



Dans la photographie ci-dessus, on remarque que les deux figures les plus à droite sont des images miroir l'une de l'autre. Les élèves (ainsi que les adultes!) passent souvent beaucoup de temps à discuter et à justifier pourquoi ces deux figures tridimensionnelles sont distinctes. Un autre concept important qui découle de ce défi est l'équivalence tridimensionnelle (qui est semblable à l'idée de la congruence bidimensionnelle). Bien souvent, les élèves pensent qu'il y a deux figures distinctes quand, en fait, les deux figures sont équivalentes mais ont besoin d'être réorientées (voir l'exemple ci-dessous). Pour déterminer si deux figures ou plus sont équivalentes, il faut souvent faire des comparaisons en effectuant premièrement une rotation mentale, puis deuxièmement, des comparaisons physiques. Lorsque l'on travaille avec cinq cubes (que l'on peut nommer pentacubes), le défi de l'identification des figures distinctes devient encore plus apparent.



Habiletés spatiales concernées

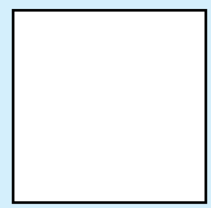
- Visualisation (imagination des diverses combinaisons possibles)
- Composition et décomposition de figures tridimensionnelles
- Compréhension de l'équivalence tridimensionnelle par rotation mentale et physique

Mémoire visuo-spatiale : Un grand nombre de tâches spatiales font appel ou même dépendent de la mémoire de travail visuo-spatiale. La mémoire de travail visuo-spatiale fait référence à la mémoire temporaire (mémoire à court terme) et à la manipulation d'informations visuelles et spatiales. Si l'on revient aux trois exercices de visualisation spatiale, nous pouvons voir et être conscient de notre mémoire de travail visuo-spatiale : la conservation d'une image mentale (p. ex., une mosaïque géométrique en forme de triangle) puis la manipulation ou la transformation de cette image (p. ex., visualiser comment le triangle peut être utilisé – au moyen d'itérations et de rotations – pour composer un hexagone). De nouvelles recherches suggèrent qu'en ce qui concerne l'apprentissage des mathématiques et les résultats dans ce domaine, la mémoire de travail visuo-spatiale joue un rôle essentiel. En tant qu'enseignants, nous avons besoin de savoir que les élèves traitent et mémorisent l'information grâce à des modalités à la fois verbales et visuo-spatiales; tout aussi bien dans l'enseignement des mathématiques ou de la littératie, nous devons tenir compte de ces deux modes de pensée et d'apprentissage.

Essayez ceci!

Dessiner pour voir des formes différemment

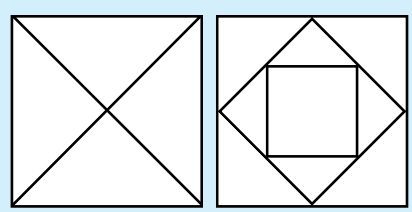
Dans cette activité, les élèves doivent porter leur attention sur des formes, des structures et des relations géométriques en dessinant de mémoire des formes composées de lignes géométriques (p. ex., un carré traversé par une ligne). Avant de commencer, assurez-vous que chaque élève ait un crayon et une feuille de papier sur laquelle est dessiné un carré dont le contour est noir (voir l'image ci-contre).



Lorsque la classe est prête, montrez (ou présentez sur le Smart Board) une forme géométrique (voir les exemples ci-dessous) et demandez aux élèves de l'examiner soigneusement pendant environ cinq secondes (les élèves ne devraient faire aucun dessin pendant ce temps, mais seulement étudier la forme, la structure et les relations géométriques). Après cinq secondes, cachez le dessin et demandez aux élèves de la classe de faire de leur mieux pour reproduire l'image de mémoire. Montrez-leur à nouveau le dessin et demandez-leur de déterminer si leur copie est une réplique exacte de l'original. Si nécessaire, demandez aux élèves de faire des modifications à leur dessin. Conclure avec une discussion en classe ou avec des discussions en petits groupes animés par des pairs au sujet des propriétés géométriques du dessin. Comment les élèves se sont-ils souvenus du dessin ou l'ont-ils mémorisé? Comment les élèves ont-ils vu le dessin différemment (p.ex., une enveloppe ou un X)? Quelle sorte de stratégie avez-vous utilisée pour vous rappeler du dessin? Y a-t-il des formes qui ont été distinguées plus que d'autres? Y a-t-il des façons différentes de faire le même dessin? Qu'est-ce qui se passe lorsque vous coupez un carré en deux le long de la diagonale? Lors d'une discussion en classe, les élèves en viendront à réaliser qu'il y a de nombreuses façons de voir, de mémoriser et de construire ou déconstruire un espace bidimensionnel.

Habiletés spatiales concernées

- Composition ou décomposition de formes et d'espaces
- Raisonnement proportionnel
- Mémoire visuo-spatiale



Le raisonnement spatial à travers les domaines et les années d'études

« La pensée spatiale n'est pas un ajout à un curriculum scolaire déjà chargé, mais plutôt un chaînon manquant à l'intérieur de ce curriculum. L'intégration et l'infusion de la pensée spatiale peuvent aider à atteindre les objectifs existants du curriculum. »

(National Research Council, 2006, traduction libre, p. 7)

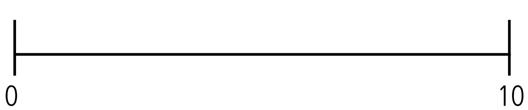
Mettre l'accent sur le raisonnement spatial peut créer des portes d'entrée supplémentaires aux mathématiques chez les élèves pour lesquels le concept des nombres est en voie de développement, mais qui possèdent des habiletés visuo-spatiales bien développées. Et c'est en créant des occasions et des contextes pour développer la pensée spatiale des élèves que nous favorisons la compréhension dans d'autres domaines des mathématiques et offrons des expériences de développement de processus mathématiques, par exemple dans les domaines de la communication et de la représentation.

Il est crucial que l'intervention en mathématiques soit précoce, car offrir aux jeunes enfants des possibilités de développer leur sens spatial est essentiel à la réalisation de leur potentiel en tant qu'apprenants des mathématiques (Sinclair et Bruce, 2014). Mais nous savons aussi que l'importance de la pensée spatiale augmente durant l'adolescence, à mesure que les élèves étudient un curriculum de plus en plus abstrait les conduisant à des mathématiques de haut niveau, car « l'espace est plus étroitement associé aux mathématiques dans les années d'études supérieures » (Mix et Cheng, 2012, traduction libre, p. 219).

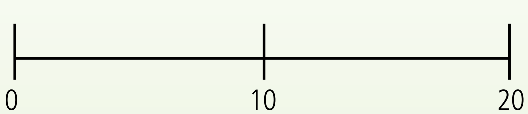
Voici quelques exemples donnant matière à réfléchir sur le raisonnement spatial à travers les domaines et les années d'études.

Cycles primaire et moyen

Numération et sens du nombre : La droite numérique peut être un outil efficace pour développer le sens du nombre chez les élèves. Lorsque l'on explore les nombres entiers ou les nombres rationnels avec les élèves, une droite constitue une représentation visuo-spatiale efficace des quantités et de leurs diverses relations.



Par exemple, pour répondre à la question « *Où se trouve le nombre 5 sur la droite numérique?* », les élèves doivent porter leur attention sur les deux extrémités de la droite pour déterminer l'espace qu'elle occupe. D'autres activités effectuées avec une droite peuvent notamment être d'indiquer des nombres repères sur la droite. Par exemple, où le nombre 13 devrait-il se trouver sur la droite ci-dessous?

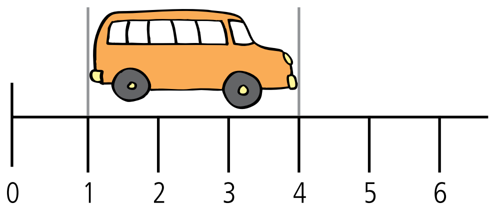


Est-ce que le nombre repère 10 a été utile? Comment vous a-t-il aidé dans votre raisonnement?

Conseil : Lorsque l'on présente la droite numérique aux enfants, il faut se rappeler que beaucoup d'entre eux n'ont pas l'habitude de penser aux nombres comme étant des entités qui occupent un espace c.-à-d.

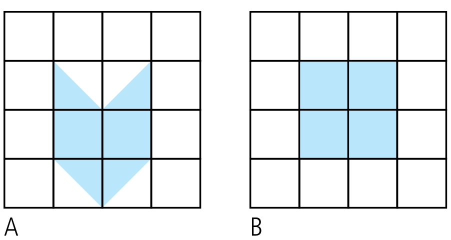
des intervalles ou des unités. Par conséquent, de nombreux enfants considèrent les activités avec la droite numérique comme étant des exercices pour apprendre à réciter une suite de nombres ou à compter à partir d'un nombre, car ils portent leur attention sur l'ordinalité et non sur les relations spatiales entre les nombres. Prêtez attention aux élèves qui déterminent leurs propres intervalles ou unités sans tenir compte des points aux extrémités.

Mesure : Les activités de mesure offrent de nombreuses occasions d'apprentissage qui font appel à la pensée spatiale.



Quelle est la longueur de l'autobus scolaire?

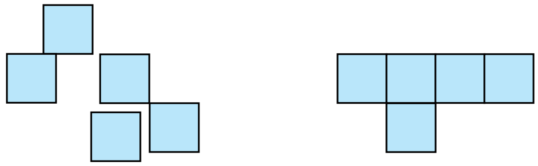
Les élèves des écoles élémentaires répondent habituellement à cette question de deux façons : soit ils comptent le nombre de traits (ce qui leur donne une réponse de quatre unités) ou encore ils utilisent le nombre sous le trait à droite de l'objet pour déterminer la longueur (ce qui leur donne à nouveau une réponse de quatre unités). Tout comme avec une mesure standard, la réponse à cette question nécessite que l'on porte attention aux intervalles (espaces).



Dans quel dessin la surface bleue est-elle la plus grande?

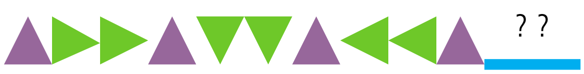
Une réponse typique à cette question est A, car le bleu se répartit sur six carrés et non pas sur quatre comme en B. Tout comme la tâche de mesure linéaire ci-dessus, pour répondre à cette question, il faut comprendre le concept d'unités de mesure. En outre, les élèves doivent raisonner spatialement d'une de deux façons. Une solution spatiale consiste à déplacer le grand triangle du bas de la figure A en haut de cette même figure. Cette méthode visuo-spatiale permet de faire une comparaison directe des deux figures (sans qu'il soit nécessaire de compter quoi que ce soit). L'autre solution spatiale consiste à unitariser, c'est-à-dire à former une unité simple et comparable à l'aide de parties séparées. Dans ce cas, des unités carrées peuvent être obtenues en combinant deux triangles.

Géométrie et le sens de l'espace : La géométrie et le sens de l'espace peuvent être développés et améliorés grâce à des casse-têtes et des jeux. Dès les premières années d'études et tout au long de leur parcours scolaire, les casse-têtes offrent aux élèves de vastes possibilités d'exercer leurs habiletés de pensée spatiale. Les tangrams et les pentominos sont deux exemples dans lesquels des pièces se prêtent à des jeux et des activités de type casse-tête, qui permettent de développer des habiletés telles que la composition ou la décomposition de formes, l'exploration des transformations géométriques (réflexions, transformations, rotations), la visualisation et la congruence.



Au moyen de cinq carrés, combien de configurations distinctes de pentominos pouvez-vous créer? Note : Un pentomino est une figure géométrique constituée de 5 carrés congruents joints par au moins un de leurs côtés, sans espace ni chevauchement (voir l'exemple ci-dessus).

Modélisation et algèbre : L'exploration et l'observation de régularités dès la maternelle et le jardin requièrent un raisonnement à la fois arithmétique et visuo-spatial.



Le premier problème ci-dessus nécessite que l'on identifie le motif de base (un processus visuel), tandis que le second nécessite que l'on identifie à la fois le motif de base et la régularité de la rotation (un processus spatial). Une question que l'on pourrait poser aux élèves serait : « Qu'est-ce qui vient ensuite? » Il pourrait s'ensuivre une discussion sur les diverses possibilités dépendamment de l'attribut utilisé (couleur ou orientation).

Représentations graphiques : Des représentations graphiques de toutes sortes nous permettent de créer des représentations visuelles de données. Au cours des années du primaire, il s'agit de diagrammes concrets, de pictogrammes et de diagrammes à bandes. Nous pouvons aussi représenter graphiquement des expressions algébriques pour mettre en évidence des suites non numériques à motif croissant. Les graphiques nous permettent de voir l'aspect ou la nature de nos données et d'étudier les changements et les tendances de croissance.

Dans l’exemple ci-dessous (tiré de mathclips.ca), les élèves utilisent un outil pour étudier comment les changements de valeur dans l’expression algébrique influent sur la pente de la droite et son ordonnée à l’origine. À noter que le titre et les exemples sont en anglais : Les élèves peuvent modifier les valeurs dans les représentations verbales ou algébriques pour immédiatement voir comment la pente de la droite change. Cet outil visuel puissant permet aux élèves de voir quels sont les rapports entre diverses représentations et de comprendre l’incidence des valeurs d’entrée sur l’aspect du graphique.

Représentation algébrique
Cliquez sur les boutons Haut/Bas.

Passer à la représentation verbale de la règle

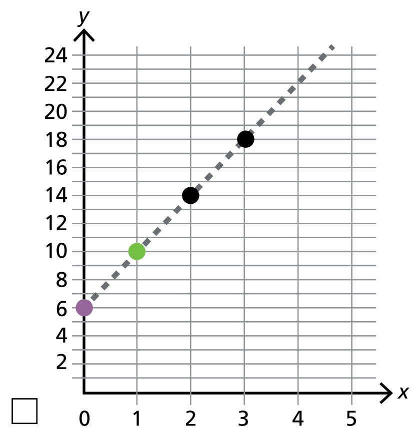
$y = 4x + 6$

Représentation verbale
Cliquez sur les boutons Haut/Bas.

Passer à la représentation verbale de la règle

Monter dans un taxi coûte 6 $ et il faut payer 4 $ de plus pour chaque kilomètre parcouru.

Représentation graphique
Faites glisser les points colorés sur le graphique.
Cliquez sur la droite ou un point noir.



Problèmes écrits : Peu importe les domaines ou les années d’études, de nombreux problèmes traitent du déplacement dans l’espace et nécessitent que l’élève visualise des éléments-clés de ceux-ci.

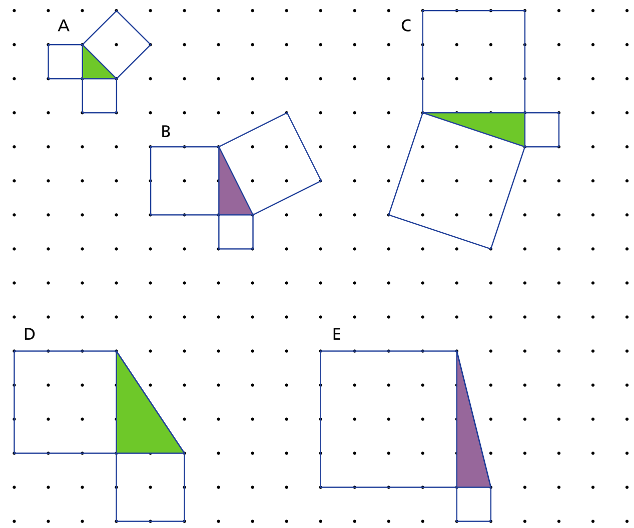
Un arbre a été planté à chacune des deux extrémités d’un sentier rectiligne. Par la suite, des arbres sont plantés tous les 10 mètres le long du sentier. La longueur du sentier est de 30 mètres. Combien d’arbres ont été plantés en tout?

Pour résoudre ce problème et des problèmes semblables, il est préférable d’imaginer ou de dessiner un schéma qui représente les relations spatiales décrites dans le problème. Les élèves peuvent ensuite établir des rapports entre leurs connaissances en mathématiques et les informations contextuelles et visuelles pour sélectionner des stratégies appropriées et faire des estimations vraisemblables.

Niveau intermédiaire et niveau supérieur

Les élèves des cours de mathématiques de la 7e à la 12e année doivent appliquer leur capacité de raisonnement spatial dans de nombreux contextes. Les exemples ci-dessous correspondent à plusieurs années d’études et cours.

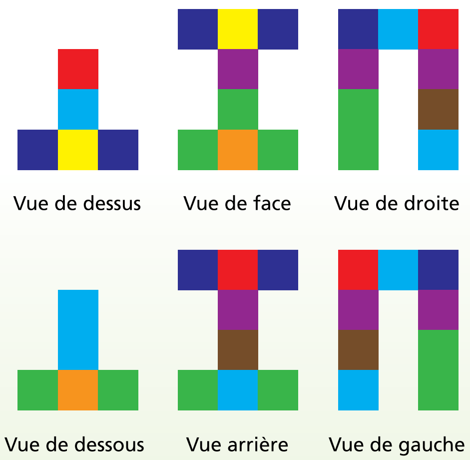
Comment visualiser le théorème de Pythagore : Dans cette activité, on demande aux élèves de trouver et de noter l'aire de la surface obtenue en mettant au carré les trois côtés des triangles rectangles.



L'utilisation d'une méthode visuo-spatiale offre aux élèves une occasion de « voir » que l'aire de la surface du carré construit sur l'hypoténuse (c^2) est égale à la somme de l'aire des surfaces des carrés ($a^2 + b^2$) construits sur les deux autres côtés du triangle. La représentation visuo-spatiale aide les élèves à comprendre la signification de la formule $a^2 + b^2 = c^2$ ainsi que le fait que l'aire de la surface de chaque carré est déterminée à partir des longueurs des côtés a, b et c. Ceci met en lumière la distinction entre l'aire de la surface des carrés formés par les côtés telle qu'on la voit dans la relation et les longueurs proprement dites des côtés.

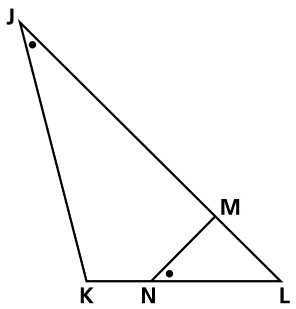
Utilisation de vues pour construire une structure tridimensionnelle : Les élèves ont besoin de visualiser comment chacune des vues ci-dessous pourrait se combiner pour créer une figure unique tridimensionnelle. Ils doivent observer les différentes vues de la figure et effectuer mentalement des rotations de l'image pour obtenir la figure qu'ils imaginent.

Créer la structure tridimensionnelle avec les vues suivantes.

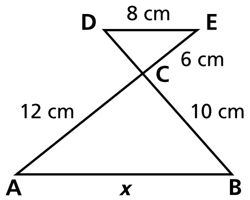


Visualisation de triangles semblables : La tâche illustrée à gauche nécessite à la fois une rotation et une réflexion pour que l'on puisse séparer les deux triangles, et aligner les côtés et angles correspondants pour en déterminer les similitudes ou les rapports. La tâche à droite nécessite que les élèves déterminent les angles équivalents, puis fassent pivoter les triangles de sorte à aligner les côtés correspondants et à déterminer la longueur inconnue du côté AB.

Identifiez deux triangles qui sont semblables. Justifiez comment vous le déterminez.



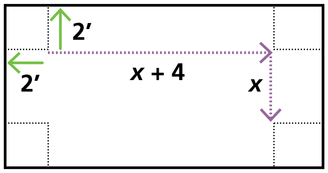
Trouvez la longueur de x.



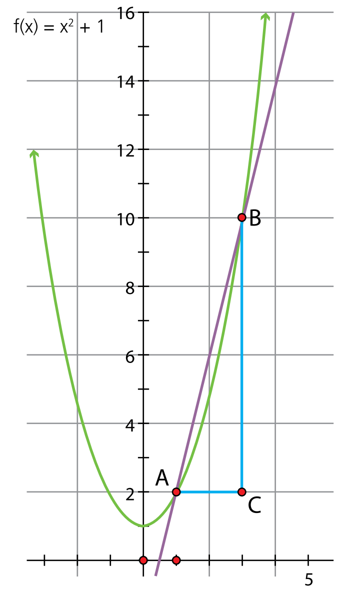
Création d'une équation quadratique pour représenter un contexte mathématique : Les élèves des niveaux intermédiaire et supérieur doivent créer des équations mathématiques représentant des situations mathématiques complexes.

Jean veut construire un évaporateur pour faire du sirop d'érable. Il découpe un carré ayant une longueur de deux mètres à chaque coin d'une tôle d'acier rectangulaire, puis il plie les côtés. Pour que le bac soit stable, Jean veut que sa longueur ait 4 mètres de plus que sa largeur. Si le volume du bac doit être de 64 mètres cubes, quelle devrait être la largeur de cette tôle d'acier?

Pour mettre en relation la tôle de métal et le bac devant être fabriqué, les élèves doivent visualiser comment les côtés seront pliés vers le haut et identifier les mesures correspondant à la longueur, à la largeur et à la hauteur du bac sur la tôle. Pour établir le lien entre les aspects bidimensionnels et tridimensionnels, les élèves peuvent créer un diagramme ou un modèle en utilisant du papier, qui aurait l'aspect suivant :



Compréhension des taux de variation : Les élèves doivent visualiser le déplacement du point B le long de la courbe de la fonction tout en visualisant en même temps la variation correspondante de la pente de la droite sécante. Ils doivent aussi établir la tendance de la variation de la pente de la droite sécante à mesure que le point B continue de se rapprocher du point A, et ils doivent établir le lien avec la valeur de la pente. Cette visualisation permettra aux élèves de faire la transition à la représentation algébrique de cette relation.



Imaginez que le point B se déplace le long de la courbe f(x) *et se rapproche du point A. Comment varie la pente de la droite sécante AB? Quelle est la pente de AB lorsque le point B coïncide exactement avec le point A?*

Établissement d'équations trigonométriques : La construction de diagrammes constitue une stratégie essentielle pour l'établissement et la résolution des équations trigonométriques.

Samantha est montée au sommet d'un phare qui se trouve lui-même en haut d'une falaise, et elle voit un bateau qui a jeté l'ancre dans la mer. Elle mesure l'angle de dépression, qui est de 38°. Elle descend du phare et mesure l'angle de dépression du bateau, qui est de 25°. Le phare a une hauteur de 49 m. À quelle distance le bateau se trouve-t-il de la base de la falaise?

Dans cet exemple tridimensionnel, les élèves doivent prendre en compte à la fois l'emplacement et la direction des divers éléments présentés dans le problème. Ils doivent correctement placer les mesures et les angles dans le modèle ou le diagramme. Des calculs supplémentaires devront être effectués avant que le diagramme puisse être étiqueté, car il faut bien comprendre où se trouvent les divers points et comment ils sont alignés pour obtenir un résultat exact. Par exemple, l'angle de dépression devra être soustrait de 90° afin que l'on puisse obtenir l'angle intérieur. Pour cette opération, les élèves doivent prendre en considération un axe visuel horizontal et une rotation vers le bas par rapport aux perspectives du phare. En outre, il est possible d'avoir des estimations vraisemblables en traçant un diagramme raisonnablement proportionnel.

Comment pouvons-nous promouvoir le raisonnement spatial?

Nous savons que la pensée spatiale est importante, et nous savons aussi qu'elle peut être améliorée par l'éducation et l'expérience. Nous savons aussi que le raisonnement spatial n'est pas une discipline ou un domaine distinct des mathématiques et n'est pas non plus limité au domaine de géométrie et au sens de l'espace, mais est plutôt un processus qui peut favoriser l'apprentissage et la communication à travers les domaines (même dans des disciplines autres que les mathématiques). De plus, nous savons qu'il s'agit d'un nouveau territoire; comment pouvons-nous commencer à intégrer cette perception dans notre pratique?

1. Comprendre ce qu'est le raisonnement spatial et trouver des moyens pour le développer dans ce que vous enseignez déjà.*

Comme point de départ, envisagez toutes les façons selon lesquelles votre enseignement actuel met l'accent sur le raisonnement spatial. Prenez le temps d'examiner en quoi divers contenus mathématiques sont propices au développent du raisonnement spatial par leur nature même et trouvez des moyens d'éventuellement *spatialiser* ces contenus. Un grand nombre de situations d'apprentissage en mathématiques se prêtent naturellement à des stratégies spatiales pour résoudre des problèmes. Cette idée ne

* Plusieurs des questions présentées dans cette section ont été adaptées d'articles de Newcombe (2010, 2013).

nécessite pas que des modifications radicales soient apportées au programme de mathématiques, mais requiert plutôt « de changer l'information sur laquelle on met l'accent et que l'on privilégie » (Drefs et D'Amour, 2014, traduction libre).

Examinons par exemple le problème écrit suivant :

> *Quel est le nombre minimal de cure-dents nécessaires pour construire 100 carrés de cure-dents adjacents formant une grille?*

Un moyen pour résoudre ce problème est d'imaginer ou de dessiner un schéma. Cette façon visuo-spatiale d'aborder le problème sert de point de départ à d'éventuels calculs. Commencer la résolution de ce problème par une représentation visuo-spatiale permet d'éviter la solution rapide et incorrecte souvent proposée, qui est de 400 cure-dents (1 carré = 4 cure-dents, $100 \times 4 = 400$). Beaucoup de problèmes écrits décrivent un mouvement dans l'espace, obligeant la personne qui les résout à visualiser des éléments importants du problème. Pour résoudre ces problèmes, il est utile d'imaginer ou de dessiner la relation spatiale décrite.

Il peut aussi être utile de vous demander jusqu'à quel point vous êtes à l'aise avec le raisonnement spatial et comment cela se transmet aux élèves dans la salle de classe. Une étude récente suggère qu'il existe un lien entre le niveau de confort des enseignants en ce qui concerne le raisonnement spatial et le développement des habiletés spatiales de leurs élèves tout au long de l'année scolaire (Gunderson, Ramirez, Beilock et Levine, 2013). Les élèves de 1re et de 3^{e} année dont les enseignants éprouvaient peu d'anxiété au sujet du raisonnement spatial avaient fait d'importants progrès dans leurs habiletés de pensée spatiale au cours de l'année scolaire. Les auteurs ont noté qu'étant donné que la pensée spatiale ne constitue pas une partie distincte du curriculum (comme la lecture ou les mathématiques), les enseignants éprouvant de l'anxiété au sujet du raisonnement spatial risquent de ne pas intégrer des activités qui développent des habiletés liées au raisonnement dans leurs salles de classe. Cette étude suggère qu'une façon d'améliorer les habiletés de pensée spatiale des élèves pourrait être d'accroître le niveau de familiarité et de confort des enseignants avec l'enseignement et l'apprentissage des habiletés de pensée spatiale.

2. Mettre l'accent sur la géométrie et le sens de l'espace.

La recherche a démontré qu'en Amérique du Nord, moins de temps et d'attention sont consacrés en classe à la discipline par excellence des mathématiques spatiales – la géométrie et le sens de l'espace – qu'aux autres sujets et domaines des mathématiques (un sondage à grande échelle récent a montré que cette tendance était aussi présente en Ontario; voir Bruce, Moss et Ross, 2012). Les enseignants peuvent favoriser des possibilités de développement de la pensée spatiale chez les élèves en mettant l'accent sur la géométrie dans leur cours de mathématiques. En fait, le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2006) a recommandé qu'*au moins la moitié* de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques soit centrée sur la géométrie, la mesure et le raisonnement spatial au cours des premières années scolaires (voir Sinclair et Bruce, 2014). En particulier, Sinclair et Bruce recommandent de prêter une attention particulière à la géométrie dynamique et transformationnelle (concernant les objets en mouvement) plutôt qu'aux formes statiques (c.-à-d. immobiles) et aux caractéristiques des formes. L'exploration de la géométrie dynamique favorise trois secteurs de la pensée spatiale associés au rendement en mathématiques : la visualisation spatiale, la perspective et la rotation mentale (Mix et Cheng, 2012).

3. Mettre l'accent sur le langage spatial.

Il s'agit d'enseigner et de modeler l'utilisation du vocabulaire spatial en toute occasion. La recherche a confirmé en quoi cela est important dans des études démontrant qu'il y avait une corrélation entre l'utilisation du vocabulaire spatial par les parents et les capacités spatiales de leurs enfants, et dans des études où les enfants qui avaient appris le vocabulaire spatial obtenaient de meilleurs résultats dans les tâches spatiales que les autres (voir Tepylo, Moss et Hawes, à paraître). Dans le cas des élèves les plus jeunes, ce vocabulaire inclut des mots relatifs à la position, la distance, l'orientation et la direction, par exemple, gauche, droite, sur, en-dessous, au-dessus, au-dessous, au milieu, parallèle, haut et court. Avec les élèves plus âgés, le vocabulaire géométrique en lien avec les transformations géométriques s'ajoutera à ce langage.

Essayez ceci!

Jeux de type maître-constructeur

Les jeux de type maître-constructeur offrent des occasions ludiques de faire intervenir la pensée spatiale et d'utiliser en même temps le langage en lien avec la position et l'orientation. Avec ce jeu, les élèves forment des paires séparées par une barrière placée sur le bureau ou la table. D'un côté de la barrière, hors de vue du partenaire, un membre de la paire (le maître) crée une construction ou une régularité visuelle avec des objets, tels que des blocs de construction. Le maître donne ensuite des directives à l'oral à son ou sa partenaire (le constructeur) pour recréer la construction. Ce jeu favorise une utilisation riche et systématique du langage de la géométrie (notamment position, orientation, taille, forme, distance, etc.). De nombreuses variantes de ce jeu sont possibles selon le matériel utilisé par les élèves.

4. Favoriser les stratégies de visualisation.

Il s'agit d'encourager les élèves à utiliser leurs habiletés de visualisation pour mieux comprendre et résoudre des problèmes, et aussi de leur fournir de nombreuses occasions de pratiquer cette habileté importante et d'animer les discussions en classe à ce sujet. Des discussions ouvertes qui permettent aux élèves d'échanger au sujet de la façon dont ils visualisent les problèmes et les solutions mettent en relief l'importance de l'imagination dans les mathématiques, et le fait qu'il y a de nombreuses façons d'imaginer un problème et sa solution. Il est important pour les élèves de reconnaître que les points de vue diffèrent et que certaines façons d'aborder un problème sont plus efficaces que d'autres. Dans nos classes de mathématiques, plutôt que de demander aux élèves de prédire ou d'estimer la solution à un problème, il est préférable de leur demander de visualiser le problème et ses données. En incitant les élèves à prendre conscience de la visualisation et en leur offrant des occasions de pratiquer et de développer cette habileté, nous mettons à leur disposition une stratégie supplémentaire sur laquelle ils peuvent compter pour résoudre des problèmes.

Ce ne sont pas tous les élèves qui feront naturellement appel à des stratégies spatiales pour résoudre des problèmes de mathématiques. Pour certains, les mathématiques sont perçues comme étant une activité purement numérique. Même en géométrie – la science des relations spatiales – les élèves se sentent souvent obligés de produire une réponse en utilisant uniquement des formules et des nombres. Les élèves ont besoin d'être encouragés à raisonner en mathématiques selon diverses méthodes, notamment des stratégies spatiales. Les élèves ont aussi besoin d'être encouragés à utiliser leur imagination et à visualiser les problèmes et les solutions mathématiques. Tout comme la visualisation aide dans la lecture et l'écriture, il en va de même dans les mathématiques. On pourrait par exemple demander aux élèves de fermer les yeux et de voir la translation d'une figure sur un plan cartésien afin de prédire son nouvel emplacement et sa nouvelle orientation. Ils pourraient ensuite vérifier si leur prédiction est juste.

Essayez ceci!

Questionnement qui favorise la visualisation

Pour que les élèves expriment clairement l'imagerie mentale qu'ils utilisent dans la résolution de problèmes, essayez de leur poser les questions suivantes : « Qu'est-ce que vous voyez mentalement? » ou « Qu'est-ce que vous avez vu ou visualisé qui vous a aidé à résoudre le problème? ». Ce genre de questions incite les élèves à donner des descriptions montrant clairement ce qu'ils ont compris tout en les encourageant à penser de façon métacognitive à leurs stratégies de visualisation.

5. Mettre l'accent sur les représentations visuelles de données et souligner leur importance.

Il y a déjà une abondance de données visuelles dans nos classes, et nous savons qu'il s'agit d'un bon moyen pour favoriser la pensée spatiale. Les diagrammes, les cartes et les représentations graphiques de toutes sortes sont des représentations importantes et puissantes pouvant être mises à profit dans les salles de classe. Nora Newcombe (2013) suggère que nous pouvons associer une intention lorsque nous présentons de nombreux types d'information, par exemple lorsque nous montrons des horaires quotidiens dans lesquels les cases horaires de courte durée prennent moins de place que les autres, de façon à renforcer l'idée que la variation graphique spatiale peut avoir une signification réelle (p. 29). Elle propose aussi d'employer des moyens visuels pour aider les élèves à voir et à comparer des quantités (comme le temps) et des objets très grands et très petits (comme des atomes).

Encourager les élèves à représenter leur pensée mathématique est aussi bien entendu très utile (nous demandons depuis longtemps aux élèves de représenter leur pensée de diverses façons, au moyen de schémas, de nombres et de mots). Cependant, Doug Clements et Julie Sarama (2009) soulignent que toutes les représentations visuelles ne sont pas nécessairement utiles. Par exemple, certaines recherches ont montré que des schémas produits par des élèves particulièrement performants pour résoudre des problèmes mathématiques représentaient souvent avec exactitude la relation spatiale concernée dans le problème (et étaient par conséquent très utiles pour résoudre le problème); en revanche, les représentations visuelles créées par des élèves moins performants n'aident pas toujours ces élèves à résoudre le problème (ces dessins tendent à mettre en évidence les éléments extérieurs du problème au lieu de représenter des idées abstraites ou générales). Plutôt que de simplement faire des dessins, il serait avantageux pour beaucoup d'élèves d'obtenir un soutien pratique et concret dans le choix de représentations visuelles, et l'utilisation d'éléments visuels et de schémas pertinents et logiques pour la résolution des problèmes (diagrammes de Venn, par exemple).

6. S’exprimer avec des gestes et encourager les élèves à faire de même.

La pensée spatiale, comme d’ailleurs d’autres processus cognitifs, peut parfois sembler invisible pour ceux qui enseignent les mathématiques. Le fait que la pensée spatiale puisse se manifester en l’absence du langage peut être à l’origine de difficultés dans la communication d’idées et de solutions. Pour cette raison, les élèves, et surtout les plus jeunes, ne sont pas toujours en mesure d’expliquer verbalement des solutions spatiales aux problèmes. Par exemple, un enfant peut être capable de composer de diverses façons un hexagone ayant diverses formes, mais peut cependant avoir des difficultés à exprimer clairement le processus. Il faut donner aux élèves maintes occasions d’expliquer leur raisonnement, et les enseignantes et enseignants doivent les y encourager en prêtant attention à d’autres expressions de la compréhension. Par exemple, une gestuelle – c’est-à-dire la communication d’idées avec les mains – est fréquemment employée, mais constitue souvent une forme de communication qui est négligée. Les gestes constituent un moyen particulièrement puissant d’exprimer des informations spatiales et ils communiquent à leur observateur des renseignements qui ne sont pas toujours exprimés avec des mots. Lorsque quelqu’un explique un concept spatial (en donnant des instructions, par exemple, ou en décrivant des termes géométriques, tels qu’une rotation, une translation et une transformation), la parole est souvent complétée par des gestes. En fait, plusieurs études sur l’enseignement des mathématiques montrent que l’utilisation de gestes renforce la compréhension; une corrélation étroite a été établie entre l’utilisation de gestes par les enseignants et les élèves, et les résultats des élèves (Goldin-Meadow, 2005). Cette recherche, ainsi que d’autres démontrant les liens entre l’utilisation des doigts et l’activité du cerveau (Dehaene, Piazza, Pinel et Cohen, 2003), montre que les gestes peuvent avoir un pouvoir incroyable, car ils aident à créer de nouveaux réseaux de neurones dans le cerveau et contribuent au développement de la compréhension conceptuelle, ce qui justifie pourquoi il faut leur porter une plus grande attention.

7. Fournir des contextes qui favorisent l’exploration des concepts et des problèmes de mathématiques en utilisant du matériel de manipulation.

Nous connaissons depuis longtemps l’importance du matériel de manipulation, car il permet aux élèves de développer leur compréhension conceptuelle des mathématiques. Les nouvelles recherches sur le raisonnement spatial en démontrent encore plus l’importance, car elles aident à comprendre comment leur utilisation favorise l’apprentissage des élèves. L’emploi d’outils, par exemple, est une activité hautement spatiale. Newcombe (2013) souligne que la création et l’utilisation d’outils (un moment majeur dans l’évolution des humains et un des « traits de notre espèce ») est tributaire de la pensée spatiale : « pour créer un outil performant, il faut d’abord imaginer une forme adaptée à une fonction particulière, par exemple couper ou creuser, puis façonner cette forme en partant de formes plus grandes » (traduction libre, p. 102). Nous pouvons voir comment l’emploi de matériel de manipulation dans les salles des classes de mathématiques peut aider à consolider le développement de la compréhension et des concepts, car la visualisation et la résolution de problèmes sont inhérentes à leur emploi. En outre, la recherche sur l’importance de la gestuelle donne certaines indications sur la façon dont les interactions kinesthésiques avec du matériel peuvent former de nouveaux réseaux dans nos cerveaux qui nous aident à comprendre et à communiquer.

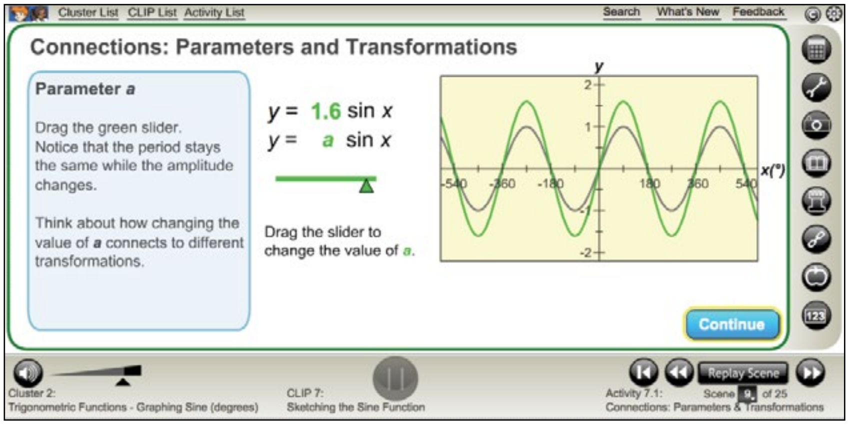
Bien qu'il soit important que le matériel de manipulation soit mis à la disposition des élèves, un aspect encore plus essentiel est comment les utiliser de façon pertinente et efficace, c'est-à-dire en tant que partie intégrante de la pensée spatiale et de la résolution de problèmes. Autrement dit, la tâche d'apprentissage est conçue de façon à ce que le matériel de manipulation ne soit pas uniquement utilisé pour communiquer ou montrer des représentations de la pensée après le travail cognitif de la résolution du problème; ce sont les outils servant à résoudre le problème. Prenons l'exemple d'une étude des fonctions linéaires : on demande aux élèves de construire des suites non numériques à motif croissant en utilisant des carreaux algébriques, de créer des règles pour généraliser la croissance de leurs suites, puis de créer des représentations concrètes en utilisant les carreaux pour enfin créer un graphique linéaire montrant la croissance de leurs suites (voir Beatty et Bruce, 2012). Dans cet exemple, les carreaux algébriques sont au cœur de la représentation et de la résolution du problème, ils font partie intégrante de la tâche et ne constituent pas un accessoire ou une option que les élèves peuvent choisir. Il s'agit là d'un exemple extrêmement efficace d'utilisation de matériel de manipulation pour construire la compréhension à l'aide de moyens visuels et kinesthésiques dans lequel est proposée une exploration pratique de quantités numériques et d'expressions algébriques (voir ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2013). Cette utilisation de matériel de manipulation est très semblable à ce qui se fait en mathématiques lorsque l'on travaille avec des modèles ou des simulations pour résoudre des problèmes. C'est aussi une manifestation du pouvoir du matériel de manipulation à nous aider à passer de représentations concrètes à des idées abstraites, et donc aider les élèves à comprendre visuellement et à internaliser des concepts abstraits.

8. Offrir aux élèves des occasions ludiques de mettre en pratique leur raisonnement spatial.

Un grand nombre d'activités ludiques supposent une pensée spatiale. C'est le cas des casse-têtes, de nombreux jeux de table, des jeux guidés avec des blocs ou d'autres formes géométriques, et de certains types de jeux vidéo. Selon de nombreuses recherches, des liens ont été établis entre ces types d'activités ludiques et le raisonnement spatial, et aussi, dans certains cas, les résultats en mathématiques (voir Tepylo, Moss et Hawes, 2014). On a constaté que les casse-têtes et les jeux de construction, et cela tout particulièrement dans un contexte guidé ou semi-structuré, amélioraient les performances spatiales et la connaissance de la géométrie (Casey, Andrews *et al.*, 2008; Casey, Erkut *et al.*, 2008; Ficher *et al.*, 2013), ainsi que les résultats en mathématiques (Clements et Sarama, 2009). On a constaté que les jeux Tetris et les jeux de rôle, dans lesquels le joueur se déplace à travers des environnements virtuels, sont étroitement liés à l'amélioration du raisonnement spatial (Feng *et al.*, 2007; Terlecki, Newcombe et Little, 2008). De nouvelles recherches sur les applications qui misent sur l'utilisation de la technologie des écrans tactiles pour susciter une gestuelle parallèlement au raisonnement spatial sont très prometteuses (Sinclair et Bruce, 2014). Une grande partie de ces recherches affirme que le temps consacré à ce type de jeu est bien investi en ce qui concerne le raisonnement spatial.

9. Tirer parti de la technologie.

Les technologies numériques nous permettent de manipuler et de voir l'espace et les relations spatiales comme jamais auparavant. Les systèmes d'information géographique (SIG), le GPS, Google Earth et d'autres modèles, outils et interfaces informatiques (comme les tableaux blancs interactifs) nous permettent de manipuler des objets et des idées comme jamais auparavant nous aurions cru que cela était possible avec un crayon et du papier ou un tableau noir et de la craie. Les technologies des écrans tactiles suscitent des gestes et des raisonnements spatiaux grâce auxquels une compréhension conceptuelle est construite (Bruce, 2014b). Dans l'exemple ci-dessous, un élève peut faire glisser le curseur pour changer les valeurs, de façon à voir comment un changement dans les paramètres a une incidence sur le graphique d'une fonction périodique. Depuis la maternelle jusqu'à la 12^{e} année, la technologie offre aux élèves des occasions de voir et même de manipuler des idées mathématiques de façon puissante. La compréhension de l'importance du raisonnement spatial en mathématiques nous incite sans cesse en tant qu'enseignante et enseignant à tirer parti de la technologie utile, en temps et lieu.



Consultez le site www.mathclips.ca pour des exemples (anglais seulement).

Ressources du Ministère et documents de référence

Ressources du Ministère et autres ressources

Bruce, C. (2014a). "Spatializing" the mathematics curriculum: New perspectives, new frameworks. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vancouver, BC: PME.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2005a). *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année Mathématiques*. Toronto, ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math18curr.pdf

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2005b). *Le curriculum de l'Ontario, 9e et 10e année Mathématiques*. Toronto, ON: Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math910curr.pdf

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2007). *Le curriculum de l'Ontario, 11e et 12e année Mathématiques*. Toronto, ON: Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math1112currb.pdf

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2010). *Full-day early learning Kindergarten program* (version préliminaire). Toronto, ON: Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/kindergarten_english_june3.pdf

EduGAINS. *Student critical learning instructional paths supports (CLIPS) in mathematics: Grades K–12*. http://www.edugains.ca

EduSource. http://edusourceontario.com

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2012). *Paying attention to proportional reasoning*. Toronto, ON: Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. http://www.edu.gov.on.ca/eng/teachers/studentsuccess/Proportion-Reason.pdf

Reed, S. K. (2010). Thinking visually. New York, NY: Psychology Press.

Université Trent, Faculté d'éducation et de formation professionnelle. *Trent Math Education Research Collaborative*. http://tmerc.ca

Université de Cambridge, *NRICH Enriching Mathematics, Millennium Mathematics Project*. http://nrich.maths.org/frontpage

Université de Toronto, Ontario Institute for Studies in Education (OISE). *Robertson program for inquiry-based teaching in math and science*. http://www.oise.utoronto.ca/ robertson/index.html

Bibliographie

Ansari, D. (2013). *Disorders of the "mathematical brain": Developmental dyscalculia and mathematics anxiety*. Keynote address: Ontario Association of Mathematics Educators, Seneca College, Toronto, ON.

Beatty, R., et Bruce, C. (2012). *Linear relationships: From patterns to algebra*. Toronto, ON: Nelson.

Bruce, C. (2014b). Use of the iPad as a mediator for the development of spatial reasoning in young children. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vancouver, BC: PME.

Bruce, C., Moss, J., et Ross, J. (2012). *Survey of JK to Grade 2 teachers in Ontario, Canada: Report to the Literacy and Numeracy Secretariat of the Ministry of Education*. Toronto, ON: Ministère de l'Éducation de l'Ontario.

Casey, B., Andrews, N., Schindler, H., Kersh, J. E., Samper, A., et Copley, J. (2008). The development of spatial skills through interventions involving block building activities. *Cognition and Instruction, 26*(3), 269-309.

Casey, B., Erkut, S., Ceder, I., et Young, J. (2008). Use of a storytelling context to improve girls' and boys' geometry skills in kindergarten. *Journal of Applied Developmental Psychology, 29*, 29–48.

Center for Spatial Studies, University of Southern California, Santa Barbara. (n.d.). About us: Imagine a nation of spatial thinkers. Repéré à http://spatial.ucsb.edu/about-us/

Cheng, Y. L., et Mix, K. S. (2012). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*. doi:10.1080/15248372.2012.725186

Clements, D., et Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Clements, D. H., et Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 133–148.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., et Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology, 20*, 487–506.

Drefs, M., et D'Amour, L. (2014). The application of ambiguous figures to mathematics: In search of the spatial components of number. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vancouver, BC: PME.

Farmer, G., Verdine, B. N., Lucca, K., Davies, T., Dempsey, R., Hirsh-Pasek, K., et Golinkoff, R. M. (2013). *Putting the pieces together: Spatial skills at age 3 predict to spatial and math performance at age 5*. Presenté à la Society for Research in Child Development, Seattle, WA.

Feng, J., Spence, I., et Pratt, J. (2007). Playing an action video game reduces gender differences in spatial cognition. *Psychological science, 18*(10), 850–855.

Fisher, K. R., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N., et Golinkoff, R. M. (2013). Taking shape: Supporting preschoolers' acquisition of geometric knowledge through guided play. *Child development, 84*(6), 1872–1878.

Goldin-Meadow, S. (2005). *Hearing gesture: How our hands help us think*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., et Levine, S. C. (2013), Teachers' spatial anxiety relates to 1st- and 2nd-graders' spatial learning. *Mind, Brain, and Education, 7*, 196–199. doi:10.1111/mbe.12027

Huttenlocher, J., Levine, S., et Vevea, J. (1998). Environmental input and cognitive growth: A study using time-period comparisons. *Child Development, 69*(4), 1012–1029.

Johnson, C. Y. (2014, January 28). A not-close-enough view of “Hawking.” *The Boston Globe*. Repéré à https://www.bostonglobe.com/arts/television/2014/01/28/hawking-doc-brings-almost-close-enough-his-genius/UAbkAEKXaYKxVAY0jAkT8J/story.html

Jordan, N., et Levine, S. (2009). Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews, 15*, 60 68.

Larsen, K. (2005). *Stephen Hawking: A biography*. Westport, CT: Greenwood Press.

Lohman, D. F. (1996). Spatial ability and G. Dans I. Dennis & P. Tapsfield (éditeurs.), *Human abilities: Their nature and assessment* (pp. 97–116). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ministère de l’Éducation de l’Ontario. (2013). Mettre l’accent sur le raisonnement algébrique. Toronto, ON: Imprimeur de la Reine pour l’Ontario. Repéré à http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/PayingAttentiontoAlgebraFR.pdf

Mix, K. S., et Cheng, Y.-L. (2012). The relation between space and math: Developmental and educational implications. Dans J. B. Benson (éditeurs), *Advances in child development and behavior* (Vol. 42, pp. 197–243). San Diego, CA: Academic Press.

National Research Council. (2006). *Learning to think spatially: GIS as a support system in the K–12 curriculum*. Washington, DC: National Academic Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.

Newcombe, N. S. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator, 34*, 29–35.

Newcombe, N. S. (2013). Seeing relationships: Using spatial thinking to teach science, mathematics, and social studies. *American Educator, 37*(1), 26–31.

Newcombe, N. S., et Frick, A. (2010). Early education for spatial intelligence: Why, what, and how. *Mind, Brain, and Education, 4*(3), 102–111.

Rourke, B. P. (1993). Arithmetic disabilities, specific and otherwise: A neuropsychological perspective. *Journal of Learning Disabilities, 26*, 214–226.

Sarama, J., et Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, NY: Taylor & Francis.

Shumway, J. F. (2013). Building bridges to spatial reasoning. *Teaching Children Mathematics, 20*(1), 44–51.

Sinclair , N., et Bruce, C. (2014). Spatial reasoning for young learners. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vancouver, BC: PME.

Tepylo, D. H., Moss, J., et Hawes, Z. (à paraître). Spatial reasoning: Considerations for mathematics educators.

Terlecki, M. S., Newcombe, N. S., et Little, M. (2008). Durable and generalized effects of spatial experience on mental rotation: Gender differences in growth patterns. *Applied Cognitive Psychology, 22*, 996 1013.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., et Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin, 139*(2), 352.

Verdine, B. N., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N. S., Filipowicz, A. T., et Chang, A. (2013). Deconstructing building blocks: Preschoolers' spatial assembly performance relates to early mathematical skills. *Child Development*. doi:10.1111/cdev.12165

Wai, J., Lubinski, D., et Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology, 101*, 817–835.

Pour commander des exemplaires supplémentaires, communiquer avec ServiceOntario

416 326-5300 ou 1 800 668-9938

http://www.publications.serviceontario.ca/ecom

Imprimé sur du papier recyclé

ISBN 978-1-4606-3849-1