Niveau 3, exemple 2

A

Activité 1

Pour faire cette activité, tu auras besoin des annexes suivantes :

> Annexe A : Marché canadien de l'équipement de ski et de surf des neiges.
>
> Annexes B à D : Consommation des principaux groupes d'aliments par personne.

1. a) Selon l'annexe A, l'argent dépensé pour les planches de surf des neiges a beaucoup augmenté de 1994 à 1999. Calcule le taux de variation annuel moyen de la somme d'argent dépensé pour **les planches** entre 1994 et 1999.

Données

1994 = 29 700 \$ ⇒ $f(1994)$

1999 = 48 000 ⇒ $f(1999)$

Formule

$$\Delta \$ = \frac{f(1999) - f(1994)}{1999 - 1994}$$

$$\Delta \$ = \frac{48\,000 - 29\,700}{1999 - 1994}$$

$$\Delta \$ = \frac{18\,300}{5}$$

$$\Delta \$ = 3660 \text{ \$/année}$$

∴ Le taux de variation moyen est de : 3660 \$/année

b) Sers-toi de la même annexe pour expliquer pourquoi le nombre obtenu n'est pas représentatif du taux de variation réel de la somme d'argent dépensé par année.

Le nombre obtenu n'est pas représentatif du taux de variation réel parce que qu'on regarde l'annexe, on peut voir que les augmentations ne sont pas successifs. Il y a aussi des baisses d'argent dépensés et même à un d'ail, on remarque facilement que le taux de variation entre la plupart de ces années, n'arrive pas à 3660 ou n'approche pas des 3000 \$.

B

2. Pour être un bon surfeur ou une bonne surfeuse, il est nécessaire d'être en forme et d'avoir une bonne alimentation. Aux annexes B à D, tu trouveras des indices de consommation des principaux groupes d'aliments par les Canadiens et Canadiennes.

a) D'après l'annexe B, quel est le taux de variation annuel moyen de la quantité de **fruits frais** consommés par personne entre 1989 et 2000?

Données

1989 = 58,5 kg → $f(x_1)$

2000 = 64,1 kg → $f(x_2)$

Formule

$$\Delta \text{ fruits} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Delta \text{ fruits} = \frac{64{,}1 \text{ Kg} - 58{,}5 \text{ Kg}}{2000 - 1989}$$

$$\Delta \text{ fruits} = \frac{5{,}6 \text{ Kg}}{11}$$

$$\Delta \text{ fruits} = 0{,}509 = 0{,}51 \text{ Kg/année}$$

∴ le taux de variation de la quantité de fruits frais est : 0,51 Kg/année

b) D'après l'annexe C, quel est le taux de variation annuel moyen de la quantité de **légumes frais** consommés par personne entre 1989 et 2000?

Données

1989 = x_1

2000 = x_2

128,4 Kg = $f(x_1)$

142,2 Kg = $f(x_2)$

Formule

$$\Delta \text{ légumes} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Delta \text{ légumes} = \frac{142{,}2 \text{ Kg} - 128{,}4 \text{ Kg}}{2000 - 1989}$$

$$\Delta \text{ légumes} = \frac{13{,}8 \text{ Kg}}{11}$$

$$\Delta \text{ légumes} = 1{,}25 \text{ Kg/année}$$

∴ la variation moyenne de légumes frais est de : 1,25 Kg/année

c) D'après l'annexe D, quel est le taux de variation annuel moyen de la quantité de **volaille** consommée par personne entre 1989 et 2000?

Données

1989 = x_1

2000 = x_2

$f(x_1)$ = 27,1 Kg

$f(x_2)$ = 35,2 Kg

Formule

$$\Delta \text{ volaille} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Delta \text{ volaille} = \frac{35{,}2 \text{ Kg} - 27{,}1 \text{ Kg}}{2000 - 1989}$$

$$\Delta \text{ volaille} = \frac{8{,}1 \text{ Kg}}{11}$$

$$\Delta \text{ volaille} = 0{,}736 = 0{,}74 \text{ Kg/année}$$

∴ le taux de variation moyen est de : 0,74 Kg/année

C

d) Crois-tu que l'alimentation des Canadiens et Canadiennes s'est améliorée depuis 1989? Justifie ton opinion à l'aide d'arguments fondés sur les taux de variation.

Oui je crois que l'alimentation des Canadiens/Canadiennes s'est améliorée depuis 1989 surtout au niveau des légumes frais parce qu'ils ont mangé plus aujourd'hui qu'il y a 11 ans. En ce qui concerne aussi les fruits et la volaille, il y a eu aussi une légère hausse bien qu'elle ne représente environ que la moitié de la hausse au niveau des légumes frais.

3. Penses-tu que le surf des neiges a pris plus de popularité que le ski alpin de 1994 à 1999? Sers-toi de l'annexe A et des taux de variation pour justifier ton opinion.

Oui je crois que le ski alpin a pris plus popularité que le surf des neiges de 1994 à 1999. Même en regardant le tableau de l'annexe A, on voit que le taux de variation moyen entre 2 années, n'est pas aussi grande que pour le surf des neiges et lors qu'on fait le calcul, le taux de variation du surf des neiges est environ 3000 fois plus élevée que pour le ski alpin. Par conséquent, la popularité du ski alpin a augmenté.

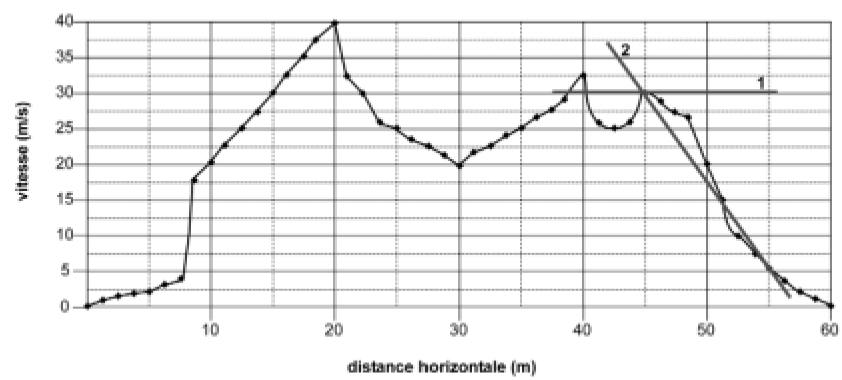
D

Activité 2 : Un surfeur au centre de ski

www.snowboarding.com
www.usskiteam.com/publishingfolder/98.htm

Voici le graphique à utiliser durant l'activité

Vitesse du surfeur en fonction de sa distance horizontale



La distance horizontale entre deux points successifs = 1,25 m
1 = droite tangente
2 = droite sécante

E

4. En te référant au graphique précédent, associe chaque élément de la colonne de gauche à un élément de la colonne de droite.

1) intervalle de croissance	a) (30, 20)
2) intervalle de décroissance	b)]41,25, 43,75[
3) extremum	c)]0, 20[
4) point d'inflexion	d)]40, 60[
5) intervalle de concavité vers le haut	e) (51,25, 15)
6) intervalle de concavité vers le bas	f) (25, 25)
	g)]45, 55[
	h)]0, 5[

5. Détermine trois taux de variation moyens de la vitesse du surfeur par rapport à sa distance horizontale parcourue à partir desquels tu pourras estimer le taux de variation instantané à 45 m. Ta réponse doit inclure :

   1. les intervalles de distance choisis et les taux de variation moyens correspondants;
   2. un estimé du taux de variation instantané à 45 m.

Formule : $v_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta d} \frac{m/s}{m}$

1-]L, N[ ]J, L[ ]L, P[

$\Delta]L, N[= \frac{27,5 - 30}{47,5 - 45}$

$= \frac{-2,5}{2,5}$

$= -1 s$

$= 1 s$

$\Delta]J, L[= \frac{30 - 25}{45 - 42,5}$

$= \frac{5}{2,5}$

$= 2 s$

-> $\Delta]L, P[= \frac{20 - 30}{50 - 45}$

$= \frac{-10}{5}$

$= -2 s$

$= 2 s$

2- une estimation du taux de variation instantané à 45 m est d'environ 2 s.

F

6. Explique la différence entre les taux de variation moyens et le taux de variation instantané.

Les taux de variation moyens sont calculés à partir de 2 pts tandis que pour le taux de variation instantané on a besoin d'un seul pt. De plus le taux de variation moyens permet de connaître une variation entre 2 points or que le taux de variation instantané, permet de connaître une variation à un seul pt.

7. Détermine l'équation de la droite tangente à la courbe au point où la distance horizontale est égale à 45 m.

Équation : $y = mx + b$

on cherche équ^n à 45 m
(45, 30)

$y = mx + b$

$(30) = 0(45) + b$

$30 = b$

$m = 0 s$

$y = 30$

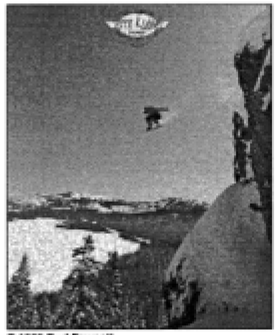
$x = 45$

∴ équ^n : $y = 30$

G

Activité 3

Réponds aux questions de l'activité 3 sans utiliser la calculatrice à affichage graphique.



© 1985 Bud Fawcett

Un surfeur participe à une compétition de saut en longueur. La distance horizontale *s*, en mètres, parcourue par le surfeur dans les airs pendant un temps *t*, en secondes, est donnée par l'équation

$$s(t) = -0{,}07t^3 + 9t$$

Lors de son saut, le surfeur demeure dans les airs pendant 6,5465 secondes avant d'atterrir.

8. Trouve sa vitesse horizontale moyenne pour les périodes suivantes :

   i) entre 0 s et 2,5 s　　ii) entre 3 s et 5,5 s

(i) $v_{moy} = \dfrac{s(2.5) - s(0)}{2{,}5 - 0}$ m/s

$= \dfrac{21{,}40625 - 0}{2{,}5 - 0}$ m/s

$v_{moy} = 8{,}5625$ m/s

$= 8{,}6$ m/s

∴ la vitesse moyenne entre 0 s et 2,5 s est de : 8,6 m/s

(ii) $v_{moy} = \dfrac{s(5.5) - s(3)}{5{,}5 - 3}$ m/s

$= \dfrac{37{,}85375 - 25{,}11}{5{,}5 - 3}$

$= 5{,}0975$ m/s

$v_{moy} = 5{,}1$ m/s

∴ la vitesse moyenne entre 3 s et 5,5 s est de : 5,1 m/s

H

9. À l'aide de ***la définition de base de la dérivée***, détermine une expression qui représente la vitesse horizontale instantanée du surfeur à n'importe quel moment.

$-0{,}07t^3 + 9t$

$s'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{s(x + \Delta x) - s(x)}{\Delta t}$

$s'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(-0{,}07(t + \Delta t)^3 + 9(t + \Delta t)) - (-0{,}07t^3 + 9t)}{\Delta t}$

$= \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{(-0{,}07(t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3) + 9t + 9\Delta t) + 0{,}07t^3 - 9t}{\Delta t}$

$= \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\cancel{-0{,}07t^3} - 0{,}21t^2\Delta t - 0{,}21t\Delta t^2 - 0{,}07\Delta t^3 + \cancel{0{,}07t^3} \cancel{- 9t} + \cancel{9t} + 9\Delta t}{\cancel{\Delta t}}$

$= \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\cancel{\Delta t}(-0{,}07\Delta t^2 - 0{,}21t^2 - 0{,}21t\Delta t + 9)}{\cancel{\Delta t}}$

$= -0{,}07(0)^2 - 0{,}21t^2 - 0{,}21t(0) + 9$

$= 0{,}21t^2 + 9$

I

10. Explique pourquoi on se sert de la limite pour trouver la vitesse instantanée d'un objet en mouvement.

On utilise la limite afin de trouver la vitesse inst. d'un objet lorsqu'il commence à se rapprocher de zéro.

11. a) Quelle est la vitesse horizontale initiale du surfeur?

On cherche vitesse initiale

On sait que $s(t) = -0,07t^3 + 9t$

$s(t) = -0,07t^3 + 9t$

$s'(t) = -0,21t^2 + 9$

$s'(t) = -0,21(0)^2 + 9$

$s'(t) = 9 m/s$

$\therefore$ La vitesse horizontale initiale du surfeur est de : 9 m/s

J

11. b) Quelle est la vitesse horizontale du surfeur lorsqu'il atterrit? Arrondis ta réponse *au centième près*. Donne une explication plausible de ce qui est arrivé au surfeur à ce moment précis.

On sait que:

$s(t) = -0,07t^3 + 9t$

$t = 6,54650$

On cherche vitesse à $t = 6,5465$ s.

$s(t) = -0,07t^3 + 9t$

$s'(t) = -0,21t^2 + 9$

$= -0,21(6,5465) + 9$

$= 0,0001$

$s'(t) = 0,00$ m/s

$\therefore$ à ce moment précis, le surfeur à une vitesse de 0,00 m/s donc, elle stop.

11. c) À quel moment est-ce que la vitesse horizontale instantanée du surfeur est exactement 6,7131 m/s?

On sait que: $s(t) = -0,07t^3 + 9t$

On cherche quand vitesse = 6,7131 m/s $\Rightarrow s'(t)$

$s(t) = -0,07t^3 + 9t$

$s'(t) = -0,21t^2 + 9$

$6,7131 = -0,21t^2 + 9$

$0,21t^2 = 2,2869$

$t^2 = 10,89$

$t = \sqrt{10,89}$

$\therefore t = 3,3$ s

$\therefore$ la vitesse horizontale inst. du surfeur est exactement 6,7131 m/s à : 3,3 s

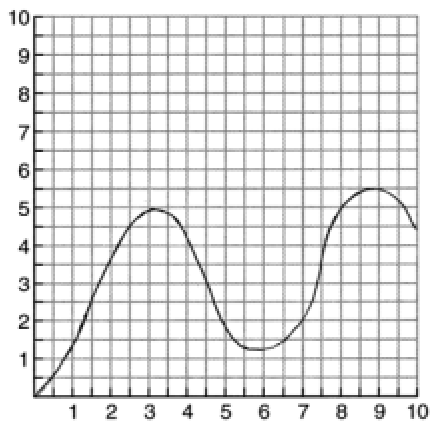
$s'(x) = 0$

$0 = 0,21t^2 + 9$

$-9 = -0,21$

K

12. À l'aide du plan cartésien ci-dessous, trace le graphique de la dérivée de la fonction pour l'intervalle ***0 s ≤ t ≤ 6,5465 s***. Donne un titre approprié au graphique, ainsi qu'un titre à chacun des axes.



$f'(x) = -0{,}21t^2 + 9$

$f''(x) = -0{,}42t$

L

13. La distance horizontale dans les airs à dépasser pour gagner la médaille d'or est de 40 m. Le surfeur réussira-t-il à gagner la compétition avec ce saut? Justifie ta réponse à l'aide de calculs.

On sait que $s(t) = 40$ m
et que $s(t) = -0{,}07t^3 + 9t$
$s'(t) = -0{,}21t^2 + 9$
$\hookrightarrow s'(t) = 0$
$0 = -0{,}21t^2 + 9$
$0{,}21t^2 = 9$
$t^2 = 42{,}85714286$
$t = 6{,}5$ s

→ le surfeur atteint une hauteur maximale à 6.5 s

→ $s(t) = -0{,}07t^3 + 9t$
$= -0{,}07(6{,}5)^3 + 9(6{,}5)$
$= 39{,}27922024$
$= 39{,}3$ m

∴ Non, le surfeur ne réussira pas à gagner la compétition.

Justification

Connaissance et compréhension
L'élève démontre une compréhension générale des concepts et exécute des algorithmes avec exactitude.

Réflexion, recherche et résolution de problèmes
L'élève suit des raisonnements mathématiques complexes, juge de la validité du raisonnement, avance des raisonnements d'une certaine complexité et applique les étapes d'un processus de résolution de problèmes avec efficacité.

Communication
L'élève utilise souvent la langue, les aides visuelles, les conventions et les symboles appropriés avec efficacité, et communique avec clarté en donnant des explications substantielles.

Mise en application
L'élève applique les concepts et les procédés pour résoudre des problèmes complexes dans des contextes familiers et reconnaît les principaux concepts et procédés mathématiques portant sur l'application à des contextes peu familiers.

Commentaire

Les réponses aux questions de connaissance et de compréhension démontrent une bonne connaissance de la majorité des concepts de base étudiés. Aux questions 1, 2, 7, 8, 9 et 11, l'élève utilise les algorithmes appropriés pour effectuer des calculs exacts. Par contre aux questions 4, 6 et 10, l'élève n'identifie pas correctement l'un des intervalles de concavité sur la courbe et ne donne pas toujours des explications assez précises, ce qui dénote une compréhension partielle du taux de variation instantané et de la notion de limite. L'élève éprouve également quelques difficultés en résolution de problèmes et donne des réponses parfois incomplètes, mais le plus souvent justes. Par exemple, à la question 13, les étapes du raisonnement mathématique ne sont pas assez logiques et les conclusions ne sont pas toutes cohérentes. L'élève y indique que le temps calculé correspond à une hauteur maximale atteinte de 6,5 s alors que le surfeur atterrit, mais il ou elle arrive à déduire le bon résultat. On constate que l'élève ne résout pas les problèmes de la manière la plus efficace. À la question 12, l'élève ne trace pas adéquatement le graphique de la dérivée et ne donne pas de titres. Dans la mise en application, l'élève a tiré d'excellentes conclusions aux questions 1, 2 et 3, bien qu'il ou elle se soit quelque peu contredit dans ses explications à la question 3. Ses compétences en communication sont très bonnes : il ou elle choisit les fonctions et pose les équations correctement, respecte les conventions et les symboles mathématiques, apporte la précision voulue à ses résultats et donne des explications mathématiques claires et précises. Pour améliorer son rendement, l'élève devrait approfondir ses connaissances théoriques et se montrer plus rigoureux dans ses réponses, y compris dans ses représentations graphiques.